ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN
F. MAGYAR-WIEN · E. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND I, HEFT 1/2

(ABGESCHLOSSEN AM 12. JULI 1946)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1946

Österr.
Ing.-Archiv

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag), Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten für ihre Arbeit einen Unkostenersatz von S 50.— für den Druckbogen von 16 Seiten, im Höchstfall S 75.— für eine Arbeit. Sie erhalten ferner 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

---

Band I, Heft 1-2 **Inhaltsverzeichnis** Preis S 36.—

Vorzugspreis für Mitglieder des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins S 32.—

Seite

Zur Einführung 1

P. Funk. Stabilitätstheorie bei Stäben unter Druck und Drillung 2

E. Melan. Ein rotationssymmetrischer Spannungs- und Verzerrungszustand einer gelochten Scheibe bei nicht linearem Spannungs-Dehnungsgesetz 14

K. Federhofer. Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung 21

C. Torre. Über den plastischen Körper von Prandtl. Zur Theorie der Mohrschen Grenzkurve 36

K. Wolf. Die Beanspruchung der Motorenlager bei der Landung von Flugzeugen 51

C. Kämmerer, Zur Frage der Temperaturdimension 54

H. Parkus. Zur Stabilität des Einrotor-Hubschraubers 58

W. Dworzak. Der freie Rand an rechteckigen Platten 66

H. Mache. Die Verbrennung von Kohleteilchen in turbulent bewegter Luft 77

E. Feifel. Ein staubeigenes Fallgesetz 92

L. Flamm. Der Mechanismus des elektrischen Feldes 105

L. Kirste. Momentenverteilungs- und Stabilitätsrechnung nach der Steifigkeitsmethode.... 117

Berichte.

F. Kracmar. Das Turbulenzproblem 130

Notizen.

R. Inzinger. Über die Scheiteltangenten von Eilinien 135

Buchbesprechungen 136

Zur Einführung.

Der Name Österreich hat in der Welt der Ingenieurwissenschaften immer einen sehr guten Klang gehabt. Die Zahl der namhaften österreichischen Vertreter dieser Wissenszweige war immer beträchtlich größer, als es der Bevölkerungszahl des Landes entsprach. Gerade jetzt, wo sieben Jahre lang unter der Herrschaft der Nationalsozialisten der Name Österreich in Acht und Bann getan war, ist es unser aller Verpflichtung, diese alte Tradition wieder aufleben zu lassen. Dazu muß aber vor allem den Vertretern dieser Fächer die Möglichkeit geboten sein, ihre Arbeiten in einem österreichischen Organ verhältnismäßig rasch und in entsprechender Form veröffentlichen zu können. Diese Möglichkeit war bis jetzt nicht vorhanden, und das war der Beweggrund, eine Zeitschrift unter obigem Titel herauszugeben. Der bekannte Verlag Springer hat in dankenswerter Weise dazu seine Mithilfe geboten und sein Name gibt Bürgschaft dafür, daß die Ausstattung dieser Zeitschrift auf voller Höhe stehen wird. Die Zeitschrift will Arbeiten von wissenschaftlichem Format auf diesem Gebiete bringen mit besonderer Berücksichtigung der ingenieurtechnischen Probleme der Praxis. Sie will aber nicht nur ein Sprachrohr für die österreichischen Ingenieure und technischen Physiker bilden, sie will auch die Beziehungen zwischen diesen und dem Ausland, die ja vor dem Einbruch der Nationalsozialisten äußerst rege waren, wiederherstellen und pflegen helfen. Mitarbeiter aus dem Ausland werden ihr sehr willkommen sein. Die Hefte werden in zwangloser Folge erscheinen und werden Arbeiten aus dem Gebiet der angewandten Mechanik und technischen Physik enthalten.

Wien, im Juli 1946.

F. Magyar, K. Wolf.

Stabilitätstheorie bei Stäben unter Druck und Drillung.

Von P. Funk, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

1. Einleitung.

In der folgenden Arbeit wird die Stabilitätstheorie von ursprünglich geraden Stäben, die unter dem Einfluß von Druck und Drillung stehen, entwickelt. Ausgangspunkt der Theorie ist der Satz von Dirichlet, wonach eine stabile Gleichgewichtslage dadurch gekennzeichnet ist, daß die gesamte potentielle Energie (Formänderungsarbeit und die potentielle Energie der von außen einwirkenden Kräfte) ein Minimum werden soll. Damit ist das mathematische Problem zurückgeführt auf die Untersuchung der zweiten Variation eines bestimmten Variationsproblems.

Zum Unterschied von der Behandlung, die das Stabilitätsproblem, wie ich glaube, fast allgemein erfahren hat (Love,[1] Grammel,[2] Timoschenko[3]), wird im folgenden keinerlei Annahme über die Erhaltung des Momentvektors nach der Verdrillung gemacht. Die Methode, die zur Bildung der zweiten Variation angewandt wird, ist dieselbe, die in Kirchhoffs Vorlesungen über Mechanik verwendet wird, um aus dem Hamiltonschen Prinzip durch Bildung der ersten Variation zu den Grundgleichungen für den schweren Kreisel zu gelangen. Im Prinzip findet man diese Methode schon bei Lagrange (2. Auflage) für denselben Zweck angewandt und Lagrange betont selbst, daß der Hauptunterschied zwischen der 1. und 2. Auflage seiner „Analytischen Mechanik" eben gerade in dieser neuen Behandlung der Gleichungen für den starren Körper besteht.

Das Wichtigste an dieser Methode sind gewisse Vertauschungsrelationen zwischen Differentiation und Variation. Diese Relationen spielen auch in der Gruppentheorie, insbesondere bei Cartan, eine große Rolle. Mit Rücksicht darauf, daß solche Vertauschungsgleichungen hauptsächlich bei der Behandlung nicht holonomer Systeme in der Mechanik vorkommen, könnte man ganz allgemein diese Methode als Methode der Quasikoordination in der Variationsrechnung bezeichnen. (Nebenbei bemerkt, scheint mir diese Methode auch für rein geometrische Probleme von Bedeutung zu sein.)

Im 2. Abschnitt wollen wir, obwohl sich die Vertauschungsformeln in vielen Abhandlungen und Lehrbüchern vorfinden, diese nochmals kurz ableiten, da wir dabei gleichzeitig Gelegenheit haben, die im folgenden verwendete Bezeichnungsweise zu erläutern. Überhaupt bringt die Arbeit viel Bekanntes, aber, wie ich glaube, in einer neuen Darstellung, die vielleicht in mancher Beziehung anregend wirken könnte.

Durch die im 3. Abschnitt hergeleiteten Formeln ist für alle im Titel genannten Stabilitätsprobleme, die einen ursprünglich geraden Stab betreffen, so z. B. auch Kippung, eine einheitliche Formel gegeben.[4]

Die weiteren Abschnitte behandeln Spezialprobleme.

2. Die Vertauschungsformeln.

Im Anschluß an die übliche Theorie des gebogenen Stabes denken wir uns einen ursprünglich geraden zylindrischen Stab, der unter dem Einfluß von Kräften verbogen und verdrillt wird. Jedem Querschnitt sei ein rechtwinkeliges Koordinatensystem ξ, η, ζ in der üblichen Weise zugeordnet, daß der Koordinatenanfangspunkt mit dem Schwerpunkt des Querschnitts, die ξ- und η-Achse mit den beiden Hauptträgheitsachsen zusammenfallen und die ζ-Achse in die Richtung der Tangente der Zentrallinie (Kurve der Querschnittsschwerpunkte) weist. Die Richtungskosinusse dieses Koordinatensystems in bezug auf ein raumfestes x-y-z-System seien

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Wir betrachten eine einparametrige Schar von gebogenen Stäben und fassen dementsprechend die Größen $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ als Funktionen der Bogenlänge s der Zentrallinie und eines Parameters ε auf. Denken wir uns eine gleichförmige Bewegung des Koordinatensystems längs der Zentralachse mit der Geschwindigkeit 1 ($s = t$), dann erhalten wir in bekannter Weise für die Komponenten der absoluten Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf ein augenblicklich festgehaltenes ξ-η-ζ-System:

$$\left.\begin{aligned} \mathring{w}_1 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\,\alpha_3 + \frac{\partial \beta_2}{\partial s}\,\beta_3 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s}\,\gamma_3 \\ \mathring{w}_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathring{w}_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Differenziert man nach ε, so erhält man in analoger Weise „Winkelvariationen"

$$\left.\begin{aligned} \check{w}_1 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varepsilon}\,\alpha_3 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \varepsilon}\,\beta_3 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon}\,\gamma_3 \\ \check{w}_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \check{w}_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

Um nun zu den Vertauschungsformeln zu gelangen, betrachten wir die beiden Gleichungssysteme

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_\alpha}{\partial s} = -[\mathring{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\alpha], \tag{2a}$$

$$\mathfrak{e}_\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_\alpha}{\partial \varepsilon} = -[\check{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\alpha], \tag{2b}$$

von denen das erste die bekannte Verknüpfung zwischen Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit darstellt und das zweite in analoger Weise durch Vertauschung von s und ε gewonnen wird.

Die Vertauschungsformeln erhält man, indem man die erste Gleichung nach ε, die zweite Gleichung nach s differenziert und subtrahiert. Es ergibt sich unter Anwendung des vektoriellen Entwicklungssatzes

$$\left[\left(\frac{\partial \mathring{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{\mathfrak{w}}}{\partial s}\right)\mathfrak{e}_\alpha\right] = \check{\mathfrak{w}}\,(\mathring{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\alpha) - \mathring{\mathfrak{w}}\,(\check{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\alpha).$$

Wir multiplizieren skalar mit $\mathfrak{e}_\beta$ und erhalten

$$\mathfrak{e}_\gamma\left(\frac{\partial \mathring{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{\mathfrak{w}}}{\partial s}\right) = \begin{vmatrix} (\mathring{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\alpha)\,(\mathring{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\beta) \\ (\check{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\alpha)\,(\check{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{e}_\beta) \end{vmatrix} = [\mathring{\mathfrak{w}}\,\check{\mathfrak{w}}]\,\mathfrak{e}_\gamma.$$

Vertauscht man α, β, γ zyklisch, so ergibt sich allgemein

$$\frac{\partial \mathring{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{\mathfrak{w}}}{\partial s} = [\mathring{\mathfrak{w}}\,\check{\mathfrak{w}}]. \tag{3}$$

3. Allgemeine Formel für die 1. und 2. Variation.

Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit ist nun gegeben in der Form

$$\Phi_d = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sum_{1,2,3} A_i \, \mathring{w}_i^2 \, ds$$

oder in vektorieller Schreibweise durch Einführung des das deformierende Moment darstellenden Vektors $\mathfrak{m}_d = (A_i \, \mathring{w}_i)$

$$\Phi_d = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (\mathfrak{m}_d \, \mathring{\mathfrak{w}}) \, ds.$$

Dabei bedeuten A_1 und A_2 die Biegesteifigkeit und A_3 die Drehsteifigkeit des Stabes.

Außer der Formänderungsarbeit kommt bei den meisten Problemen noch ein Ausdruck der potentiellen Energie Φ_a der an den Stabenden wirkenden Kräfte und Momente hinzu. Dabei ist Φ_a eine Funktion der Koordinaten der Endpunkte des Stabes und ferner von je drei Größen, die die Lage des beweglichen Dreikants an den beiden Stabenden kennzeichnet; für diese drei Größen kann man in bekannter Weise die Eulerschen Winkel einführen. In Abhängigkeit von diesen drei Größen denken wir uns die Größen $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ ausgedrückt und schreiben dementsprechend:

$$\Phi_a = \Phi_a (x^0, y^0, z^0, x^1, y^1, z^1, \alpha_1{}^0 \ldots \gamma_3{}^0, \alpha_1{}^1 \ldots \gamma_3{}^1).$$

Insbesondere wenn durch eine Kupplung ein Drehmoment übertragen werden soll, muß die Funktion Φ_a der Eigenart der Kupplung entsprechend gewählt werden. Als Nebenbedingung sind bei dem Problem die Gleichungen zu betrachten, die den Zusammenhang zwischen den Koordinaten und den drei Richtungskosinussen der ζ-Achse, d. h. also der Tangente an die Zentrallinie vermitteln

$$\frac{dx}{ds} = \alpha_3, \quad \frac{dy}{ds} = \beta_3, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma_3. \tag{4}$$

Dementsprechend können wir den Lagrangeschen Ausdruck für unser Variationsproblem in folgender Form schreiben

$$\Phi = \Phi_d + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha (x' - \alpha_3) \, ds + \Phi_a = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} F (\alpha_1 \ldots \gamma_3, \; \alpha_1' \ldots \gamma_3', \; \lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma, x', y', z') \, ds + \Phi_a, \tag{5}$$

wobei $\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_a (x' - \alpha_3)$ zur Abkürzung gesetzt ist für $\lambda_a \left(\frac{dx}{ds} - \alpha_3\right) + \lambda_\beta \left(\frac{dy}{ds} - \beta_3\right) + \lambda_\gamma \left(\frac{dz}{ds} - \gamma_3\right)$ und die Striche Ableitungen nach der Bogenlänge bedeuten. Summenzeichen und Ableitungsstriche werden im folgenden immer in analoger Weise benützt werden.

Um zu den Extremalen des Variationsproblems zu gelangen, bilden wir die erste Variation und benützen dabei die Vertauschungsformeln (3). Wir erhalten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ \mathfrak{m}_d \frac{\partial \mathring{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha \left(\frac{\partial x'}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right) \right\} ds + \frac{\partial \Phi_a}{\partial \varepsilon}$$

$$= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ \mathfrak{m}_d \left(\frac{\partial \breve{\mathfrak{w}}}{\partial s} + [\mathring{\mathfrak{w}}\, \breve{\mathfrak{w}}] \right) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha \left(\frac{\partial x'}{\partial \varepsilon} + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \right) \right\} ds + \frac{\partial \Phi_a}{\partial \varepsilon} \tag{6}$$

oder nach Ausführung der Produktintegration

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = \left(\sum_{1,2,3} A_i \mathring{w}_i \breve{w}_i + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right) \Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial \varepsilon} -$$

$$- \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ \left((\mathfrak{m}_d)' + [\mathring{\mathfrak{w}}\, \mathfrak{m}_d] \right) \breve{\mathfrak{w}} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\lambda_\alpha' \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \lambda_\alpha \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \right) \right\} ds. \tag{6a}$$

Aus der letzteren Schreibweise entnimmt man durch Nullsetzen der Koeffizienten der als willkürliche Variationen anzusehenden Größen $\breve{w}_i \Big|_{\varepsilon=0}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$, daß für die Extremalen, d. h. für die zu untersuchenden Gleichgewichtslagen der Stäbe, die immer durch $\varepsilon = 0$ gekennzeichnet sind, gelten muß:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_1 \mathring{w}_1}{\partial s} + (A_3 - A_2)\, \mathring{w}_2 \mathring{w}_3 + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha\, \alpha_2, \\ \frac{\partial A_2 \mathring{w}_2}{\partial s} + (A_1 - A_3)\, \mathring{w}_1 \mathring{w}_3 - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha\, \alpha_1, \\ \frac{\partial A_3 \mathring{w}_3}{\partial s} + (A_2 - A_1)\, \mathring{w}_2 \mathring{w}_3. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Als Extremalen ergeben sich also die bekannten Kirchhoffschen Gleichungen, die man natürlich auch direkt durch eine statische Betrachtung gewinnen kann. Ferner gilt:

$$\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial s} = \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial s} = \frac{\partial \lambda_\gamma}{\partial s} = 0, \tag{8}$$

d. h. die Lagrangeschen Faktoren λ_α, λ_β, λ_γ sind Konstante. Sind die Gl. (7) und (8) erfüllt, so verschwindet die 2. Zeile von (6 a).

Um die physikalische Bedeutung von λ_α, λ_β, λ_γ zu erkennen,[5] denken wir uns etwa den deformierten Stab durch zwei vollkommen starre Klemmen festgehalten, so daß auf den Stab außer den Reaktionskräften dieser Klemmen keine weiteren äußeren Kräfte wirken, d. h. daß $\Phi_a = 0$ ist. Verschieben wir eine der Klemmen virtuell, etwa in der x-Richtung, so liefert der Differentialquotient aus der Änderung der Arbeit nach x die x-Komponente der Reaktionskraft dieser Klemme. Dies folgt unmittelbar aus (5) und der Hamiltonschen Formel:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x'}.$$

Wir erkennen also, daß λ_α, λ_β, λ_γ die Komponenten des Kraftvektors der von den Klemmen auf den Stab wirkenden Reaktionskraft darstellen.

Bevor wir nun zur Bildung der zweiten Variation für eine Extremale übergehen, notieren wir folgende durch Anwendung der Vertauschungsformel (3) gewonnene Formeln:

$$1)\ \frac{\partial^2 \mathring{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon^2} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{d \breve{\mathfrak{w}}}{ds} + [\mathring{\mathfrak{w}} \breve{\mathfrak{w}}] \right) = \frac{\partial^2 \breve{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon\, \partial s} + \left[\frac{\partial \breve{\mathfrak{w}}}{\partial s}\, \breve{\mathfrak{w}} \right] - [\mathring{w}\, \breve{\mathfrak{w}}^2 - \breve{\mathfrak{w}}\, (\mathring{\mathfrak{w}}\ \breve{\mathfrak{w}})] + \left[\mathring{\mathfrak{w}}\, \frac{\partial \breve{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon} \right]. \tag{9}$$

2) Um die zweiten Differentialquotienten der neun Richtungskosinusse nach ε zu erhalten, benützen wir die Formeln (2b). Wir bezeichnen die Einheitsvektoren in der x-, y-, z-Richtung mit $\mathfrak{e}_\alpha$, $\mathfrak{e}_\beta$, $\mathfrak{e}_\gamma$. Es ergibt sich z. B.

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \varepsilon^2} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial \breve{w}_2}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \breve{w}_3}{\partial \varepsilon} \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} + \breve{w}_1 \sum_{1,2,3} \breve{w}_i \alpha_i - \alpha_1 \sum_{1,2,3} \breve{w}_i^2. \tag{10}$$

Die anderen Formeln ergeben sich in analoger Weise durch zyklische Vertauschung.

Aus (6) folgt für die zweite Variation, wenn wir noch zur Abkürzung für

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = X, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = Y, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = Z$$

und

$$\left.\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \Lambda_\alpha, \quad \left.\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \Lambda_\beta, \quad \left.\frac{\partial \lambda_\gamma}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \Lambda_\gamma$$

setzen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{m}_d}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \mathring{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon} + \mathfrak{m}_d \frac{\partial^2 \mathring{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon^2} \right) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Lambda_\alpha \left(X' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \right) + \lambda_\alpha \left(\frac{\partial^2 x'}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial \varepsilon^2} \right) \right\} ds + \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial \varepsilon^2}.$$

Dabei hat man sich nach erfolgter Differentiation überall $\varepsilon = 0$ gesetzt zu denken. Die Ausführung der Differentiationen liefert unter Berücksichtigung von (9) und (10) und Produktintegration folgende allgemeine Endformel. Wir schreiben sie so an, daß zunächst die quadratischen Glieder unter dem Integralzeichen gesammelt werden.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ \sum_{1,2,3} A_1 \left(\frac{\partial \breve{w}_1}{\partial s} + \begin{vmatrix} \mathring{w}_2 & \mathring{w}_3 \\ \breve{w}_2 & \breve{w}_3 \end{vmatrix} \right)^2 + \begin{vmatrix} A_1 \mathring{w}_1 & A_2 \mathring{w}_2 & A_3 \mathring{w}_3 \\ \frac{\partial w_1}{\partial s} & \frac{\partial w_2}{\partial s} & \frac{\partial w_3}{\partial s} \\ \breve{w}_1 & \breve{w}_2 & \breve{w}_3 \end{vmatrix} - \sum_{1,2,3} A_1 \mathring{w}_1^2 \sum_{1,2,3} \breve{w}_1^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{1,2,3} A_1 \mathring{w}_1 \breve{w}_1 \sum_{1,2,3} \mathring{w}_1 \breve{w}_1 - \sum_{\alpha,\beta\gamma} \left(\lambda_\alpha \breve{w}_3 \sum_{1,2,3} \breve{w}_1 \alpha_1 - \lambda_\alpha \alpha_3 \sum_{1,2,3} \breve{w}_1^2 \right) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Lambda_\alpha \left(X' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \right) \right\} ds -$$

$$- \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{m}_d}{\partial s} + [\mathring{\mathfrak{w}}\, \mathfrak{m}_d] \right) \frac{\partial \breve{\mathfrak{w}}}{\partial \varepsilon} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\alpha' \frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} - \lambda_\alpha \begin{vmatrix} \frac{\partial \breve{w}_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \breve{w}_2}{\partial \varepsilon} \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \right\} ds. \tag{11}$$

+ Randglieder.

(Summenzeichen sind hier und im folgenden so zu verstehen, daß zunächst zyklische Vertauschung der unter dem Summenzeichen angegebenen Indizes vorzunehmen und zu summieren ist.)

Mit Rücksicht auf das Verschwinden der ersten Variation werden die Glieder in der 3. Zeile von (11) gleich Null. Von den Randgliedern bleiben auch nur die in X, Y, Z, $\breve{w}$ quadratischen Glieder von $\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$ übrig.

4. Knickung eines zweifachgelagerten Stabes bei vollkommen freier Drill- und Druckbeanspruchung.

Was die äußeren Kräfte, die wir auf den Stab einwirken lassen, betrifft, so wollen wir zunächst den Fall behandeln, daß sowohl ein Druck P als auch ein Drehmoment M in der Richtung des Stabes, d. h. in der Richtung der ζ-Achse, die in der Ausgangslage mit der z-Richtung übereinstimmt, wirkt, und zwar so, daß sich Druck und Drehmoment am oberen in der z-Richtung beweglichen und mit 1 bezeichneten Ende

und am unteren (auch in der z-Richtung als unverschieblich gedachten) mit 0 bezeichneten Ende das Gleichgewicht halten. Was den Druck betrifft, denken wir uns diesen bei 1 als äußere Kraft, bei 0 als Reaktionskraft. Die potentielle Energie der Druckkräfte sei mit Φ_{a_1}, die potentielle Energie der Drehmomente mit Φ_{a_2} bezeichnet.

Wir behandeln den Fall $\Phi_{a_1} = P z^1$ und analog setzen wir $\Phi_{a_2} = M (\sphericalangle x, z, \zeta - \sphericalangle \xi, \zeta, z)\Big|_0^1$. Dabei bezeichnen die Buchstaben $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ die Durchstoßpunkte der betreffenden Achsen mit der Einheitskugel. Führen wir die neun Richtungskosinusse ein, so ergibt sich (etwa analytisch durch Einführung der Eulerschen Winkel):

$$\Phi_{a_2} = M \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta_3}{\alpha_3} \right) \Big|_0^1 .$$

Als Zwangsbedingung betrachten wir für

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= -\frac{l}{2}: \; x_0 = y_0 = 0, \; z_0 = -\frac{l}{2}, \\ s_1 &= \frac{l}{2}: \; x_1 = y_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

und somit für

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= -\frac{l}{2}: \; X_0 = Y_0 = Z_0 = 0, \\ s_1 &= \frac{l}{2}: \; X_1 = Y_1 \qquad = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dadurch, daß wir uns auf diese Anfangsbedingungen beschränken, kommt zum Ausdruck, daß wir Verschieblichkeit in der z-Richtung am oberen Ende und vollkommen freie Verdrehbarkeit des Koordinatensystems am oberen und unteren Ende fordern. Wir wollen diesen Fall den Fall der „vollkommen freien Drill- und Druckbeanspruchung" bezeichnen. Wir sind uns bewußt, daß die experimentelle Realisierung auf erhebliche Schwierigkeiten stößt; der Stab muß u. a. durch ganz kurze Lager geführt werden, damit keine Beschränkung der Drehbarkeit vorliegt. Die Übertragung des Drehmoments könnte man sich etwa durch Einwirkung elektrischer Ströme auf Magneten realisiert denken.

Durch obige Angaben ist das zu behandelnde Variationsproblem vollkommen definiert. Die Stabilitätsuntersuchung läuft darauf hinaus, zu untersuchen, welche Werte der Konstanten A_i, M, P, l zulässig sind, damit die zweite Variation für das oben formulierte Variationsproblem positiv definiten Charakter hat.

Um die sieben weiteren Randbedingungen zu gewinnen, die noch nötig sind, der allgemeinen Theorie des krummen Stabes entsprechend die zwölf Integrationskonstanten festzulegen, betrachten wir die in der 1. Zeile von (6) zusammengefaßten Glieder. Für $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \varepsilon}$ ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial \varepsilon} = P Z^1 + \left(M \frac{\breve{w}_1 \gamma_1 + \breve{w}_2 \gamma_2}{1 + \gamma_3} + \breve{w}_3 \right) \Big|_0^1$$

und somit finden wir für die in der 1. Zeile von (6) zusammengefaßten Glieder nachstehende Ausdruck:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = (\lambda_\nu + P) Z^1 + \left[\left(A_1 \overset{\circ}{w}_1 + \frac{M \gamma_1}{1 + \gamma_3} \right) \breve{w}_1 + \left(A_2 \overset{\circ}{w}_2 + \frac{M \gamma_2}{1 + \gamma_3} \right) \breve{w}_2 + (A_3 \overset{\circ}{w}_3 + M) \breve{w}_3 \right] \Big|_0^1 .$$

Wir bekommen die sieben freien Randbedingungen, indem wir die Koeffizienten von Z^1, $\breve{w}_i^0$, $\breve{w}_i^1$ in obigem Ausdruck Null setzen.

Für die zu untersuchende Gleichgewichtslage, d. h. für den tordierten gedrückten, aber geradebleibenden Stab erhalten wir als Lösungen der Differentialgleichungen (1a), (4), (7) und (8), die den zwölf angegebenen Randbedingungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} &x = 0, \quad \overset{\circ}{w}_1 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \\ &y = 0, \quad \overset{\circ}{w}_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \\ &z = \frac{s}{2}, \quad \overset{\circ}{w}_3 = \frac{M}{A_3}, \quad \lambda_3 = -P, \\ &\begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ \beta_1 \beta_2 \beta_3 \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\varphi = s\,\overset{\circ}{w}_3 + \varphi_0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Entsprechend der zyklischen Symmetrie bleibt die Konstante φ_0 unbestimmt.

Wir gehen nun dazu über, für die so gekennzeichnete Gleichgewichtslage die zweite Variation zu untersuchen. Wir erhalten nach (2b)

$$\left.\frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -\breve{w}_2, \quad \left.\frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \breve{w}_1, \quad \left.\frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Bilden wir mittels (10) nun $\left.\frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$, so sehen wir, daß für die potentielle Energie, die den angreifenden Drehmomenten und der angreifenden Kraft entspricht, keine quadratischen Glieder in X, Y, Z und $\breve{w}_i$ auftreten. Es ist somit nach (11) und (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Big\{ & A_1 (\breve{w}_1' - \overset{\circ}{w}_3 \breve{w}_2)^2 + A_2 (\breve{w}_2' + \overset{\circ}{w}_3 \breve{w}_1)^2 + A_3^2 \breve{w}_3'^2 - M \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \breve{w}_1' & \breve{w}_2' \end{vmatrix} - \\ & - M \overset{\circ}{w}_3 (\breve{w}_1^2 + \breve{w}_2^2) - P (\breve{w}_1^2 + \breve{w}_2^2) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Lambda_\alpha \Big(X' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \Big) \Big\} ds = \\ = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Big\{ & 2\,\Omega + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Lambda_\alpha \Big(X' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \Big) \Big\} ds. \end{aligned} \tag{14}$$

Dabei ist schon berücksichtigt, daß die Glieder der letzten Zeilen von (11) keinen Beitrag liefern, da für die zu untersuchende Gleichgewichtslage die erste Variation verschwindet. Ω ist homogen zweiter Ordnung in den $\breve{w}_i$. Um nun zu finden, unter welchen Umständen die zweite Variation positiv definiten Charakter hat, untersucht man bekanntlich, unter welchen Bedingungen das Variationsproblem

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2\,\Omega\, ds \quad \rightarrow \quad \text{Extremum}$$

für die Größen $\breve{w}_i$ eine von Null verschiedene Lösung hat. Dabei sind noch folgende erzwungene Rand- und Nebenbedingungen zu berücksichtigen, die aus den Rand- und Nebenbedingungen des ursprünglichen Variationsproblems dadurch entstehen, daß man nach ε differenziert und $\varepsilon = 0$ setzt. Die Randbedingungen lauten:

$$X_0 = X^1 = Y_0 = Y^1 = Z^1 = 0. \tag{15}$$

Die Nebenbedingungen sind mit Rücksicht auf (13)

$$\left.\begin{aligned} X' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} &= 0, \\ Y' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} &= 0, \\ Z' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Das so formulierte Problem wird in den Lehrbüchern der Variationsrechnung als akzessorisches Variationsproblem bezeichnet. Um zunächst die freien Randbedingungen zu ermitteln, hätte man, wenn man das Problem direkt in Angriff nehmen würde, nach Lagrangescher Art die linken Seiten der angeschriebenen Nebenbedingungen mit den Faktoren μ_α, μ_β, μ_γ zu multiplizieren und den Ausdruck $2\,\Omega$ zu addieren. Wir würden somit einen Lagrangeschen Ausdruck der Form:

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = 2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Omega^*\, ds = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{2\,\Omega + \mu_\alpha\left(X' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix}\right) + \mu_\beta\left(Y' + \begin{vmatrix} \breve{w}_1 & \breve{w}_2 \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}\right) + \mu_\gamma Z'\right\} ds \tag{17}$$

erhalten. Die freien Randbedingungen bekäme man wieder durch Nullsetzen der Variation. Dabei erweist sich nach (11):

$$\Lambda_\alpha = \mu_\alpha \quad \text{usw.}$$

Die mechanische Bedeutung des akzessorischen Problems ist allgemein gesagt folgende. Sei $x\,(s)$, $y\,(s)$, $z\,(s)$ die zu untersuchende Extremale und $X\,(s)$, $Y\,(s)$, $Z\,(s)$ die Extremale des zugehörigen akzessorischen Problems, so stellt $x + \varepsilon X$, $y + \varepsilon Y$, $z + \varepsilon Z$ in erster Annäherung eine benachbarte Gleichgewichtslage dar und ferner sind dann $\lambda_\alpha + \varepsilon \Lambda_\alpha$ die Komponenten der in jedem Querschnitt wirkenden Molekularkräfte.

Die anschauliche Bedeutung der Größen X, Y, Z legt es aber nahe, die $\breve{w}_i$ womöglich zu eliminieren, so daß bei der endgültigen Formulierung des akzessorischen Problems nur jene Größen auftreten. Um vollkommene Einsicht in die mechanische Bedeutung der Formeln zu gewinnen, ist allerdings auch der Zusammenhang zwischen den Größen X, Y, Z und Λ_α, Λ_β, Λ_γ von Interesse und wir werden später noch darauf zurückkommen. Für die Durchführung der eigentlichen Stabilitätsuntersuchung ist dies aber nicht nötig. Der große Vorteil dieser Elimination vom analytischen Standpunkt ist der, daß wir dadurch zu einem Variationsproblem ohne Nebenbedingungen gelangen.

Wir führen nun diese Elimination durch und bemerken zunächst, daß für ein Extremum $\breve{w}_3' = 0$ sein muß. Dies folgt unmittelbar aus Gl. (14), wenn wir noch berücksichtigen, daß in $\frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial \varepsilon^2}$, wie bereits erwähnt, die quadratischen Glieder fehlen. Wir lösen die beiden ersten Gleichungen von (16) nach $\breve{w}_1$ und $\breve{w}_2$ auf und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \breve{w}_1 &= X' \sin\varphi - Y' \cos\varphi, \\ w_2 &= X' \cos\varphi + Y' \sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Setzen wir in $2\,\Omega$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{\frac{(A_1 + A_2)}{2}(X'^2 + Y'^2) + \frac{A_2 - A_1}{2}[(X'^2 - Y'^2)\cos 2\varphi + 2\,X''\,Y''\sin 2\varphi] - \right.$$
$$\left. - M\begin{vmatrix} X' & Y' \\ X'' & Y'' \end{vmatrix} - P\,(X'^2 + Y'^2)\right\} ds = 2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Omega^{**}\,(X', Y', X'', Y'')\, ds. \tag{18}$$

Wir wollen noch den Zusammenhang zwischen Λ_α, Λ_β und X, Y kennenlernen. Wir benützen dabei die aus den Hamiltonschen Formeln sich unmittelbar ergebende Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2}\right) = \frac{\partial\,(2\,\Omega^*)}{\partial X'} = \Lambda_\alpha.$$

Benützt man anderseits die Formel, die den Hamiltonschen Formeln für ein Variationsproblem, bei dem der Integrand auch zweite Ableitungen enthält, entspricht, so erhält man:

$$A_\alpha = \frac{\partial (2\,\Omega^{**})}{\partial X'} - \frac{d}{ds}\frac{\partial (2\,\Omega^{**})}{\partial X''}. \tag{19}$$

Besonders einfach wird der Fall, wo $A_1 = A_2 = A$ ist, worauf sich die folgenden Untersuchungen beschränken. Wir bemerken jedoch, daß der Fall $A_1 \neq A_2$, vorausgesetzt, daß der Unterschied zwischen beiden Größen nicht allzu groß ist, im Anschluß an diese Arbeit nach der Lord Rayleighschen Störungstheorie behandelt werden könnte.

Eine weitere Vereinfachung kann man dadurch erzielen, daß man an Stelle von X und Y eine komplexe Veränderliche $\mathfrak{Z} = X + i\,Y$ einführt. Man erhält, wenn man von dem Integralausdruck (18) die Variation bildet:

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2}\right) = {} & (2\,A\,X'' + M\,Y')\,\delta X' - 2\,(A\,X''' + M\,Y'' - P\,X')\,\delta X + \\ & + (2\,A\,Y'' - M\,X')\,\delta Y' - 2\,(A\,Y'' - M\,X'' + P\,Y')\,\delta Y\Big|_0^1 - \\ & - 2\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \{(A\,X'''' + M\,Y''' + P\,X'')\,\delta X + (A\,Y'''' - M\,X''' + P\,Y'')\,\delta Y\}\,ds. \end{aligned} \tag{20}$$

Das Paar der Jacobischen Gleichungen ergibt sich daraus durch Nullsetzen der Koeffizienten von δX und δY unter dem Integralzeichen. Man erhält in komplexer Schreibweise:

$$A\,\mathfrak{Z}'''' - i\,M\,\mathfrak{Z}''' + P\,\mathfrak{Z}'' = 0 \tag{21}$$

oder dimensionslos angeschrieben:

$$\frac{d^4\mathfrak{Z}}{d\sigma^4} - \nu_0 \frac{d^3\mathfrak{Z}}{d\sigma^3} + \varrho\,\frac{d^2\mathfrak{Z}}{d\sigma^2} = 0,$$

wobei

$$\nu_0 = \frac{M\,l}{A}, \quad \varrho = \frac{P\,l^2}{A}, \quad \sigma = \frac{s}{l}$$

ist. Die erzwungenen Randbedingungen lauten in komplexer Form:

$$\mathfrak{Z}_0 = 0, \quad \mathfrak{Z}^1 = 0. \tag{22}$$

Dementsprechend ist in dem Ausdruck vor dem Integralzeichen in (20) δX und δY Null zu setzen. Die freien Randbedingungen erhält man durch Nullsetzen der Koeffizienten von $\delta X'$ und $\delta Y'$, in komplexer Schreibweise ergibt sich:

$$2\,\frac{d^2\mathfrak{Z}}{d\sigma^2} - i\,\nu_0 \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|_0 = 0, \qquad 2\,\frac{d^2\mathfrak{Z}}{d\sigma^2} - i\,\nu_0 \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|^1 = 0. \tag{23}$$

Wir schreiben die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (21) in der Form:

für $P \neq 0$: $\mathfrak{Z} = \mathfrak{C}_1 e^{i\nu_1 \sigma} + \mathfrak{C}_2 e^{i\nu_2 \sigma} + \mathfrak{C}_3\,\sigma + \mathfrak{C}_4, \quad \nu_{1/2} = (M \pm \sqrt{M_2 + 4\,A\,P})\,\frac{l}{2\,A}$,

für $P = 0$: $\mathfrak{Z} = \mathfrak{C}_1 e^{i\nu_0 \sigma} + \mathfrak{C}_2\,\sigma^2 + \mathfrak{C}_3\,\sigma + \mathfrak{C}_4, \quad \nu_0 = \frac{Ml}{A}$.

Sucht man die vier komplexen Konstanten so zu bestimmen, daß die vier komplexen Randbedingungen (11), (12) erfüllt sind, so erhält man vier lineare homogene Gleichungen. Nullsetzen der zugehörigen Determinante liefert als Bedingung für die Stabilitätsgrenze für $P \neq 0$

$$\cot\frac{\nu_1}{2} - \cot\frac{\nu_2}{2} + \frac{2\,(\nu_1 + \nu_2)^2}{\nu_1\,\nu_2\,(\nu_1 - \nu_2)} = 0.$$

An Stelle der komplexen Schreibweise läßt sich diese Stabilitätsbedingung auch auf reellem Weg einfach herleiten, wenn man folgenden Umstand ausnützt. Für die Kurve $X = X(s)$, $Y = Y(s)$ ist die durch den Koordinatenanfangspunkt und durch

den der Mitte des Stabes entsprechenden Punkt gehende Gerade offenbar Symmetrieachse. Da die Lage dieser Symmetrieachse wegen der zentrischen Symmetrie unbestimmt bleibt, kann man sie in die X-Achse verlegen und hat dann X als gerade Funktion, Y als ungerade Funktion in s anzusetzen. Im Falle der reinen Drillung ($P = 0$) ergibt sich dementsprechend:

$$\left.\begin{aligned} X &= c_1 \cos \nu_0 \sigma + c_2 \sigma^2 + c_3, \\ Y &= c_1 \sin \nu_0 \sigma \qquad\qquad + c_4 \sigma. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Die Stabilitätsbedingung wird für diesen Grenzfall:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2} + \frac{\nu_0}{6} = 0$$

und

$$\nu_0 = 4{,}92.$$

5. Weitere Spezialfälle.

1. Wir erwähnen den Fall, wo ein Ende des Stabes frei und das andere fest eingespannt ist. Hier ergeben sich als Zwangsbedingungen für das akzessorische Problem

$$\mathfrak{Z}_0 = 0, \quad \mathfrak{Z}^1 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|_0 = 0.$$

Die freien Randbedingungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$2 \frac{d^2\mathfrak{Z}}{d\sigma^2} - i \nu_0 \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|^1 = 0,$$

wobei zur Abkürzung wieder $\nu_0 = \frac{M l}{A}$ gesetzt ist. Wir erhalten für die Stabilitätsgrenze im Falle $P \neq 0$:

$$\nu_0 \sin \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{\nu_1 - \nu_2} \sin \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} - \nu_1 \nu_2 \cos \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = 0,$$

im Falle $P = 0$:

$$\left(\frac{\nu_0}{2} + \frac{2}{\nu_0}\right) \operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2} = 1,$$

d. h.

$$\frac{\nu_0}{2} \approx 3{,}406.$$

2. Im Falle, daß beiderseits feste Einspannung vorliegt,[6] ergeben sich folgende Zwangsbedingungen:

$$\mathfrak{Z}_0 = 0, \quad \mathfrak{Z}^1 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|_0 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|^1 = 0.$$

Die Stabilitätsbedingung ist für $P \neq 0$:

$$\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} = \frac{\sin \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}}{\cos \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - \cos \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}},$$

für $P = 0$:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2} = \frac{\nu_0}{2},$$

d. h. also:

$$\frac{\nu_0}{2} = 4{,}49.$$

3. Im Falle, daß nur ein Lager vorhanden ist, lauten die erzwungenen Randbedingungen:

$$\mathfrak{Z}_0 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|_0 = 0,$$

Die freien Randbedingungen sind

$$2 \frac{d^2\mathfrak{Z}}{d\sigma^2} - i \nu_0 \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|^1 = 0,$$

$$\frac{d^3\mathfrak{Z}}{d\sigma^3} - i \nu_0 \frac{d^2\mathfrak{Z}}{d\sigma^2} + \varrho \frac{d\mathfrak{Z}}{d\sigma}\Big|^1 = 0.$$

Die Stabilitätsgrenze ergibt
$$\nu_1 - \nu_2 = \pi,$$
insbesondere wird im Falle $P = 0$
$$\nu_0 = \pi,$$
ferner für $M = 0$
$$\varrho = \frac{\pi}{2}.$$

4. Bemerkenswert scheint noch der Fall zu sein, wo das Drehmoment auf unseren Versuchsstab durch zwei Stäbe übertragen wird, die oben und unten durch horizontale Gelenke angeschlossen sind. Dabei kommt es natürlich auf den Winkel an, den die Gelenke miteinander einschließen. Ist das kritische Verdrillungsmoment ermittelt, so kann man leicht von dem Winkel in der Stellung, wo die Ausknickung erfolgt, auf den Winkel in der Ausgangsstellung zurückschließen. Wir wollen also im folgenden das kritische Drehmoment in Abhängigkeit von dem Winkel in der kritischen Stellung ermitteln.

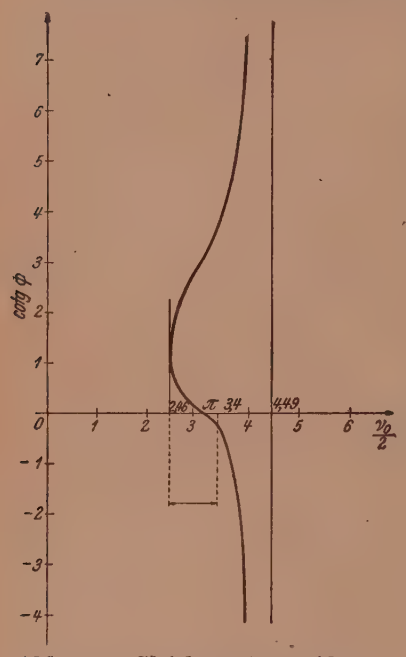

Abb. 1 zur Gleichung (27). (Abhängigkeit des kritischen Momentes vom Schneidenwinkel.)

Die die Horizontalprojektion der ausgeknickten Zentrallinie darstellende Kurve wird jedenfalls eine Symmetrieachse besitzen; wir wählen sie als X-Achse. Da wir uns hier auf den Fall der reinen Drillung beschränken wollen, machen wir den Ansatz (24).

Die erzwungenen Randbedingungen sind
$$X_0 = 0, \quad X^1 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad Y^1 = 0,$$
$$\frac{X_0'}{\cos\varphi} = \frac{-Y_0'}{\sin\varphi}, \quad \frac{X^{1\prime}}{\cos\varphi} = \frac{Y^{1\prime}}{\sin\varphi}. \tag{25}$$

Wenn man in Gl. (20)
$$\delta X_0 = \delta X^1 = \delta Y_0 = \delta Y^1 = 0,$$
$$\delta X_0' = \delta t_0 \cos\varphi, \qquad \delta Y_0' = -\delta t_0 \sin\varphi,$$
$$\delta X'^1 = \delta t^1 \cos\varphi, \qquad \delta Y'^1 = \delta t^1 \sin\varphi$$
setzt und die erzwungenen Randbedingungen (25) berücksichtigt, ergeben sich die freien Randbedingungen durch Nullsetzen der Koeffizienten von δt_0, δt^1 in der Form:
$$\left.\begin{aligned} X'' \cos\varphi + Y'' \sin\varphi\,|^1 &= 0, \\ X'' \cos\varphi - Y'' \sin\varphi\,|_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$
Die Stabilitätsbedingung ist in diesem Falle:
$$\cot\varphi = \frac{\nu_0}{4} \pm \frac{\nu_0}{4}\sqrt{\frac{\frac{\nu_0}{2} + 3\,\mathrm{tg}\,\frac{\nu_0}{2}}{\frac{\nu_0}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{\nu_0}{2}}} \tag{27}$$
(vgl. Abb. 1).

Für den Fall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\nu_0 = 2\pi$ und aus (24) und den Randbedingungen (25) und (26) folgt:
$$c_2 = c_4 = 0,$$
d. h. in diesem Sonderfall ist die Horizontalprojektion der ausknickenden Zentrallinie ein Kreis. Nun ergibt sich aus (15) und (16)
$$Z = 0,$$
somit ist nach (13) die durch $x + \varepsilon X$, $y + \varepsilon Y$, $z + \varepsilon Z$ dargestellte benachbarte Extremale angenähert eine Schraubenlinie. Dieser Fall wurde in den technischen Lehrbüchern, wie ich glaube, ausschließlich behandelt; für diesen Fall ist nach (18), (19)
$$\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta = 0,$$

d. h. es treten bei diesem Grad der Annäherung keine Reaktionskräfte in den Schneiden auf.

In den üblichen, mir bekannten Darstellungen ähnlicher Stabilitätsuntersuchungen wird ausdrücklich vorausgesetzt, der Momentvektor möge beim Übergang zur ausgebogenen Form erhalten bleiben. Eine derartige Forderung stellt aber nicht unmittelbar eine Randbedingung für die in Betracht kommenden Formänderungsgrößen dar, sondern eine Forderung für die Reaktionskräfte, also für Größen, die man meistens als gesuchte Größen ansieht. Dieser Umstand war es in erster Linie, der mich veranlaßt hat, die vorliegende Untersuchung nach den Vorschriften der Variationsrechnung durchzuführen. Vom rein mathematischen Standpunkt aus kann man allerdings auch direkt auf diesen Fall geführt werden, indem man den im 4. Abschnitt behandelten Fall dadurch abändert, daß man noch die folgenden Zwangsbedingungen zu den dort verlangten Zwangsbedingungen hinzufügt:

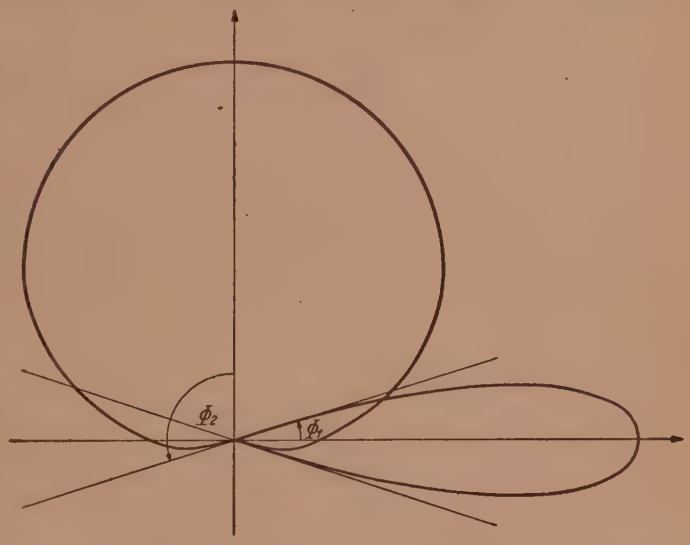

Abb. 2. Projektion der ausgeknickten Stabform im Grenzfall bei zwei Ausknickungsmöglichkeiten.

$$x_0' = x_1', \quad y_0' = y_1'.$$

Diese Erwägung läßt von vornherein erkennen, daß in diesem Falle das kritische Drehmoment höher ist als bei den im 4. Abschnitt behandelten Fall.

Dagegen ist zu betonen, daß das kleinste kritische Drehmoment für

$$\frac{\nu_0}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2} = 0$$

eintritt. Dieser Fall entspricht dem Fall, den wir im 4. Abschnitt als „Fall der vollkommen freien Druck- und Drillbeanspruchung" bezeichnet haben. Es ist zu beachten, daß in diesem Fall im Gegensatz zum Fall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ Reaktionskräfte auftreten.

Man wird noch fragen, bei welchem Wert von φ das größte kritische Moment eintritt. Diese Frage hängt aufs engste zusammen mit der Frage, welche von den beiden Winkelsymmetralen der Winkel, die die Gelenke miteinander bilden, Kurvensymmetrale ist. Es zeigt sich, daß beim maximalen kritischen Drehmoment beide Fälle möglich sind (vgl. Abb. 2); d. h., daß bei dieser Stellung der Gelenke beide Winkelsymmetralen als X-Achse verwendet werden können oder mit anderen Worten, daß die zugehörigen Winkel sich um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Aus der Bedingung, daß das Produkt der beiden zugehörigen ctg φ-Werte -1 ergeben muß, folgt:

$$\cot \frac{\nu_0}{2} = \frac{\nu_0}{2} + \frac{2}{\nu_0}$$

und

$$\Phi_1 \approx 15{,}12°,$$

$$\Phi_2 \approx 105{,}12°.$$

Dieses Ergebnis für ν_0 stimmt mit dem des Falles 1 (Abschnitt 5) überein.

Literatur:

[1] A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität. — [2] Eine besonders ausführliche Darstellung findet sich im Buch „Technische Dynamik" von Biezeno-Grammel im Anschluß an dort zitierte frühere Arbeiten Grammels, wo insbesonders auch der Fall des nicht kreisförmigen Querschnitts behandelt wird. — [3] Timoschenko: Theory of stability. — [4] Vgl. ferner das von P. Fillunger behandelte Problem: „Über die Eulerschen Knickbedingungen für Stäbe mit Schneidenlagerung". Z. angew. Math. Mech. 6 (1926). — [5] Born: Diss. Göttingen 1906. — [6] Vgl. E. L. Nicolai: „Über die Stabilität des zu einer Schraubenlinie gebogenen und gedrillten Stabes". Z. angew. Math. Mech. 6 (1926).

(Eingegangen am 22. Jänner 1946.)

Ein rotationssymmetrischer Spannungs- und Verzerrungszustand einer gelochten Scheibe bei nichtlinearem Spannungs-Dehnungsgesetz.

Von **E. Melan**, Wien.

Im folgenden soll der Spannungs-Dehnungszustand einer Scheibe mit einem kreisförmigen Loch, an dessen Rand eine radial gerichtete Zugspannung angreift, bestimmt werden, wenn zwischen Spannung und Dehnung ein nicht linearer Zusammenhang besteht. Es wird angenommen, daß durch Versuche die Zuordnung zwischen Schubspannung und Gleitung festgestellt worden ist; auf Grund dieses Zusammenhanges wird zunächst, einem Gedankengange der Herren Prager und Hohenemser* folgend, der im ersten Abschnitt dieser Arbeit kurz wiedergegeben ist, die Zuordnung zwischen Spannungs- und Dehnungstensor allgemein entwickelt, im zweiten Abschnitt die Ergebnisse für einen ebenen Spannungszustand spezialisiert und endlich im dritten Teil die Anwendung auf das vorerwähnte Problem vorgenommen. Dabei müssen wir uns, um die dabei auftretende nichtlineare Differentialgleichung integrieren zu können, allerdings auf einen ganz bestimmten Zusammenhang zwischen Schubspannung und Gleitung beschränken, der aber allgemein genug ist, um eine Anpassung von Versuchsergebnissen zu ermöglichen.

1. Analyse des Spannungs- und Dehnungszustandes in einem isotropen Kontinuum mit nichtlinearem Spannungs-Dehnungsgesetz.

Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{E}$ den Dehnungstensor

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & {}^1/_2\,\varepsilon_{xy} & {}^1/_2\,\varepsilon_{xz} \\ {}^1/_2\,\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & {}^1/_2\,\varepsilon_{yz} \\ {}^1/_2\,\varepsilon_{zx} & {}^1/_2\,\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

mit

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$$

und $\mathfrak{S}$ den Spannungstensor

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$

Wir verlangen, wie üblich, daß die Richtungen der größten Spannungen mit jener der größten Dehnungen zusammenfallen; es müssen also $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$ koaxial sein. Dies ist der Fall, wenn

$$\mathfrak{S} = Q\,\mathfrak{E} + c\,\mathfrak{J} \tag{1}$$

ist, wobei $\mathfrak{J}$ den Einheitstensor

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Prager und Hohenemser, Z. angew. Math. Mech. Bd. 12, 216ff. (1932).

vorstellt. Q und c müssen nicht Konstante sein, sondern können Funktionen der Tensorinvarianten sein.

In üblicher Weise zerlegen wir jeden der beiden Tensoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$ in den Deviator $\mathfrak{E}^0$ und $\mathfrak{S}^0$ und in einen Kugeltensor $\varepsilon\,\mathfrak{J}$ und $\sigma\,\mathfrak{J}$. Wir erhalten also

mit
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 + \varepsilon\,\mathfrak{J}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{3}\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \tag{2a}$$
und
$$\mathfrak{E}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}{}^0 & {}^1/_2\,\varepsilon_{xy} & {}^1/_2\,\varepsilon_{xz} \\ {}^1/_2\,\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}{}^0 & {}^1/_2\,\varepsilon_{yz} \\ {}^1/_2\,\varepsilon_{zx} & {}^1/_2\,\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}{}^0 \end{pmatrix}$$
wobei
$$\varepsilon_{xx}{}^0 = \varepsilon_{xx} - \varepsilon, \quad \varepsilon_{yy}{}^0 = \varepsilon_{yy} - \varepsilon, \quad \varepsilon_{zz}{}^0 = \varepsilon_{zz} - \varepsilon, \tag{2b}$$
also
$$\varepsilon_{xx}{}^0 + \varepsilon_{yy}{}^0 + \varepsilon_{zz}{}^0 = 0$$
und ebenso
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^0 + \sigma\,\mathfrak{J}$$
mit
$$\sigma = {}^1/_3\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$
und
$$\mathfrak{S}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}{}^0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}{}^0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}{}^0 \end{pmatrix}$$
wobei
$$\sigma_{xx}{}^0 = \sigma_{xx} - \sigma, \quad \sigma_{yy}{}^0 = \sigma_{yy} - \sigma, \quad \sigma_{zz}{}^0 = \sigma_{zz} - \sigma,$$
also
$$\sigma_{xx}{}^0 + \sigma_{yy}{}^0 + \sigma_{zz}{}^0 = 0$$

ist. $3\,\varepsilon$ bedeutet die Volumsänderung, σ einen allseitigen Zug oder Druck. $\mathfrak{E}^0$ stellt eine Verformung vor, bei der keine Volumsänderung eintritt. Die Gl. (1) nimmt durch Einsetzen der Werte für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{E}$ nach den Gl. (2) die Form an:
$$\mathfrak{S}^0 + \sigma\,\mathfrak{J} = Q\,\mathfrak{E}^0 + k\,\varepsilon\,\mathfrak{J}. \tag{3}$$

Entsprechend der Tatsache, daß durch Schubkräfte nur volumstreue Verformungen, aber keine Volumsänderungen, durch allseitigen Druck oder Zug hingegen nur Volumsänderungen, aber keine Gleitungen erzeugt werden, zerlegen wir die Gl. (3) in die skalare Gleichung
$$\sigma\,\mathfrak{J} = k\,\varepsilon\,\mathfrak{J} \quad \text{oder} \quad \sigma = k\,\varepsilon \tag{3a}$$
und in die Deviatorgleichung
$$\mathfrak{S}^0 = Q \cdot \mathfrak{E}^0, \tag{3b}$$
d. h.
$$\sigma_{xx}{}^0 = Q\,\varepsilon_{xx}{}^0, \quad \sigma_{yy}{}^0 = Q\,\varepsilon_{yy}{}^0, \quad \sigma_{zz}{}^0 = Q\,\varepsilon_{zz}{}^0,$$
$$\sigma_{xy} = Q\,\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = Q\,\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{zx} = Q\,\varepsilon_{zx}.$$

Wie schon erwähnt, können Q und k Funktionen der Tensorinvarianten sein. Der besondere Fall, daß Q und k konstant sind, führt zu dem erweiterten Hookeschen Gesetz mit linearer Zuordnung zwischen Spannungen und Dehnungen.

Nun soll aber an Stelle des linearen Zusammenhanges irgendein anderer treten. Zwischen allseitigem Druck oder Zug und Volumsänderung möge durch Versuche der Zusammenhang
$$\sigma = \psi\,(\varepsilon) \tag{4}$$
ermittelt worden sein; dann ist $k = \dfrac{\psi\,(\varepsilon)}{\varepsilon}$ zu setzen. Ferner möge zwischen einer Schubspannung τ und der Gleitung $\dfrac{\gamma}{2}$ die Beziehung
$$\tau = f\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{4a}$$
bestehen. Wir beachten, daß eine beliebige volumstreue Verformung durch fünf übereinander gelagerte Gleitungen darstellbar ist; wegen $\varepsilon_{xx}{}^0 + \varepsilon_{yy}{}^0 + \varepsilon_{zz}{}^0 = 0$ ist nämlich
$$\mathfrak{E}^0 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{xy}\,\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{zx}\,\mathfrak{A}_2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{yz}\,\mathfrak{A}_3 + \varepsilon_{xx}{}^0\,\mathfrak{B}_1 + \varepsilon_{yy}{}^0\,\mathfrak{B}_2$$
mit
$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ebenso kann der zugehörige Spannungszustand $\mathfrak{S}^0$ in die fünf Schubspannungszustände

$$\mathfrak{S}^0 = \sigma_{xy}\,\mathfrak{A}_1 + \sigma_{zx}\,\mathfrak{A}_2 + \sigma_{yz}\,\mathfrak{A}_3 + \sigma_{xx}{}^0\,\mathfrak{B}_1 + \sigma_{yy}{}^0\,\mathfrak{B}_2$$

zerlegt werden. In der Gl. (3b) muß nun Q einen solchen Wert erhalten, daß sich für den Fall eines einachsigen Gleitzustandes stets die Gl. (4) ergibt. Ist also z. B. nur ε_{xy} von Null verschieden, alle übrigen ε_{ik} aber Null, so muß man

$$\sigma_{xy} = f\left(\frac{\varepsilon_{xy}}{2}\right)$$

erhalten. Ebenso muß sich, wenn nur ε_{xx} vorhanden ist, die Beziehung

$$\sigma_{xx} = f\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{2}\right)$$

ergeben, denn σ_{xx} ist in diesem Falle die Schubspannung, ε_{xx} die Gleitung in zwei senkrechten Ebenen, welche die z-Achse enthalten und gegen die beiden anderen Achsen unter einem Winkel von 45° geneigt sind. Hohenemser und Prager bemerken, daß dies dadurch erreicht wird, wenn man für Q den Ansatz

$$Q = \frac{f(J)}{J}$$

wählt, worin J eine Invariante vorstellt, die für einen einachsigen Gleitzustand jeweils den Wert der Gleitung annimmt. Ist also z. B. ε_{xy} von Null verschieden, so muß in diesem Falle

$$J = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{xy}$$

werden. Dies trifft zu, wenn man z. B. für J die Hauptdehnung $\frac{1}{2}\,(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})$ verwendet. Man kann aber auch andere Invarianten wählen. So kann man, ebenfalls nach einem Vorschlage von Prager und Hohenemser für J einen Ausdruck setzen, welcher der Gestaltänderungsenergie entspricht.

Man kann für J auch stückweise analytische Funktionen ansetzen. Nur müssen dann die einzelnen Bereiche einschließlich der ersten Differentialquotienten stetig aneinander anschließen. So kann für J zunächst eine lineare Funktion gewählt werden; erreicht J einen bestimmten Wert, so tritt an Stelle der linearen Funktion eine andere. Die „Fließgrenze" definiert dann in bestimmter Weise einen Spannungszustand, außerhalb dem kein linearer Zusammenhang zwischen Formänderungen und Spannungen besteht.

2. Der ebene Spannungszustand.

Ein ebener Spannungszustand liegt vor, wenn die Spannungen in einer Richtung, z. B. der z-Achse, verschwinden. Es ist also dann

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

während der Dehnungstensor

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\varepsilon_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\varepsilon_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

lautet. σ erhält den Wert $\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{3}$ und $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3}$, so daß Spannungs- bzw. Dehnungsdeviator die Gestalt annehmen

$$\mathfrak{S}^0 = \begin{pmatrix} \frac{2\,\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{3} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \frac{-\sigma_{xx} + 2\,\sigma_{yy}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{3} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{E}^0 = \begin{pmatrix} \frac{2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}}{3} & \frac{\varepsilon_{yx}}{2} & 0 \\ \frac{\varepsilon_{xy}}{2} & \frac{-\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + 2\varepsilon_{zz}}{3} \end{pmatrix}. \tag{5a}$$

Die Gl. (3b) ergibt wegen $\sigma_{zz} = Q\,\varepsilon_{zz}$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = Q\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - 2\,\varepsilon_{zz})$$

und die Gl. (3a) wegen $\sigma = K\,\varepsilon$

so daß
$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = K\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}),$$

folgt. Damit wird weiter
$$\varepsilon_{zz} = \frac{Q - K}{2Q + K}\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\varepsilon = \frac{Q}{2Q + K}\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}). \tag{6}$$

Mit diesen Werten von ε und ε_{zz} wird

$$\varepsilon_{xx}{}^0 = \varepsilon_{xx} - \varepsilon = \varepsilon_{xx} - \frac{Q}{2Q + K}\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = \frac{1}{2Q + K}\,[(Q + K)\,\varepsilon_{xx} - Q\,\varepsilon_{yy}],$$

$$\varepsilon_{yy}{}^0 = \frac{1}{2Q + K}\,[-Q\,\varepsilon_{xx} + (Q + K)\,\varepsilon_{yy}], \tag{7}$$

$$\varepsilon_{zz}{}^0 = -\frac{K}{2Q + K}\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}).$$

Aus der Gleichung $\mathfrak{E}^0 = \frac{1}{Q}\,\mathfrak{S}^0$ mit den Werten von Gl. (5) und (5a) ergibt sich weiters

$$\varepsilon_{xx}{}^0 = \frac{1}{Q}\,\frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{3}, \quad \varepsilon_{yy}{}^0 = \frac{1}{Q}\,\frac{-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy}}{3}, \quad \varepsilon_{zz}{}^0 = -\frac{1}{Q}\,\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{3}, \tag{8}$$

bzw.
$$\sigma_{xx} = Q\,(2\,\varepsilon_{xx}{}^0 + \varepsilon_{yy}{}^0), \quad \sigma_{yy} = Q\,(\varepsilon_{xx}{}^0 + 2\,\varepsilon_{yy}{}^0), \quad \sigma_{zz} = 0. \tag{9}$$

Setzt man endlich für $\varepsilon_{xx}{}^0$ und $\varepsilon_{yy}{}^0$ die obenstehenden Werte ein, so findet man

$$\sigma_{xx} = \frac{Q}{2Q + K}\,[(Q + 2K)\,\varepsilon_{xx} + (-Q + K)\,\varepsilon_{yy}],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{Q}{2Q + K}\,[(-Q + K)\,\varepsilon_{xx} + (Q + 2K)\,\varepsilon_{yy}].$$

Für den Fall der Unzusammendrückbarkeit wird mit $K \to \infty$

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon_{zz}{}^0 = -(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad \varepsilon_{xx}{}^0 = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{yy}{}^0 = \varepsilon_{yy}, \tag{10}$$

$$\sigma_{xx} = Q\,(2\,\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = Q\,(\varepsilon_{xx} + 2\,\varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{zz} = 0 \tag{11}$$

oder
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{Q}\,\frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{3}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{Q}\,\frac{-\sigma_{yy} + 2\sigma_{xx}}{3}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{Q}\,\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{3},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{Q}\,\sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0. \tag{12}$$

3. Spannungen und Verschiebungen eines unendlich großen Bleches mit einem kreisförmigen Loch, an dessen Rand Zugspannungen angreifen.

Wegen der Kreissymmetrie fallen die Hauptachsen mit der Richtung des Radius und der Tangente der Kreise r = konst. zusammen. Läßt man die x-Richtung mit dem Radius, die y-Richtung mit der Tangente zusammenfallen und schreibt man für ε_{xx} ε_r, für ε_{yy} ε_φ, ferner für σ_{xx} σ_r und für σ_{yy} $\sigma_{\varphi\varphi}$, so erhält man, Unzusammendrückbarkeit vorausgesetzt, entsprechend den Gl. (11) und (12)

$$\sigma_r = Q\,(2\,\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi), \qquad \sigma_\varphi = Q\,(\varepsilon_r + 2\,\varepsilon_\varphi). \tag{13a}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Q}\,\frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi}{3}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Q}\,\frac{-\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi}{3}. \tag{13b}$$

Das Gleichgewicht eines Flächenelementes ergibt für die Spannungen die Bedingung

$$\sigma_\varphi = \frac{d}{dr}(r\,\sigma_r). \tag{14a}$$

Die Dehnungen lassen sich durch die Verschiebungen u in radialer Richtung mittels

$$\varepsilon_r = du/dr, \quad \varepsilon_\varphi = u/r$$

ausdrücken; es ist also, wenn für u der Wert $r\,\varepsilon_\varphi$ eingesetzt wird (dies folgt aus einer einfachen geometrischen Betrachtung),

$$\varepsilon_r = d\,(r\,\varepsilon_\varphi)/dr. \tag{14b}$$

Damit läßt sich leicht eine Differentialgleichung für σ^r oder ε_φ aufstellen. Es ist, die Werte der Gl. (14b) in Gl. (13a) eingesetzt,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Q\,(2\,r\,\varepsilon_\varphi' + 3\,\varepsilon_\varphi), \\ \sigma_\varphi &= Q\,(r\,\varepsilon_\varphi' + 3\,\varepsilon_\varphi) \end{aligned} \tag{15a}$$

und dies weiters in Gl. (14a) eingesetzt

$$Q\,\varepsilon_\varphi' + \frac{d}{dr} Q\,(2\,r\,\varepsilon_\varphi' + 3\,\varepsilon_\varphi) = 0. \tag{16a}$$

Man kann aber auch Gl. (14a) in die Gl. (13b) einsetzen und erhält

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Q}\,\frac{\sigma_r - r\,\sigma_r'}{3}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{Q}\,\frac{-\sigma_r + 2\,r\,\sigma_r'}{3} \tag{15b}$$

und mittels der Gl. (14b)

$$\frac{1}{Q}\,\sigma_r' + \frac{d}{dr}\,\frac{1}{Q}\,\frac{\sigma_r + 2\,r\,\sigma_r'}{3} = 0. \tag{16b}$$

In der Gl. (16a) wird man Q durch ε_r und ε_φ, also auch durch ε_φ und ε_φ' ausdrücken; in Gl. (16b) stellt man Q durch σ_r und σ_φ, also auch durch σ_r und σ_r' dar. Man erhält so eine Differentialgleichung für ε_φ bzw. σ_r, die aber nur dann linear ist, wenn Q eine Konstante bedeutet. Da aber im allgemeinen Q eine Funktion der Tensorinvarianten sein kann, haben wir es mit einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun.

Wir wollen die Differentialgleichung (16a)

$$Q\,\varepsilon_\varphi' + \frac{d}{dr}\,Q\,(2\,r\,\varepsilon_\varphi' + 3\,\varepsilon_\varphi) = 0$$

zum Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen wählen. Es sei angenommen, daß der Zusammenhang zwischen Schubspannung und Gleitung durch die Gleichung

$$\tau = f\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2\,M\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n \tag{17}$$

gegeben sei. Durch geeignete Wahl der Konstanten M und n (letzteres $0 \leqq n \leqq 1$) läßt sich eine hinreichende Anpassung an Versuchsergebnisse erzielen. Es ist dann

$$Q = \frac{2\,M\,J^n}{J} = 2\,M\,J^{n-1}$$

und die Differentialgleichung (16a) lautet

$$J^{n-1}\cdot\varepsilon_\varphi' + \frac{d}{dr}\,J^{n-1}\,(2\,r\,\varepsilon_\varphi' + 3\,\varepsilon_\varphi) = 0. \tag{18}$$

Weiters wollen wir annehmen, daß J eine homogene, positive Funktion ersten Grades von ε_r und ε_φ, also auch von ε_φ und ε_φ' ist. Dann kann J allgemein die Form haben

$$J = \sqrt{a\,J_1^3 + b\,J_2^{3/2} + c\,J_3},$$

wobei J_1, J_2 und J_3 die drei Invarianten des Dehnungstensors sind. Es liegt die Vermutung nahe, daß der Ansatz

$$\varepsilon_\varphi = -A\,r^w \tag{19}$$

eine partikulare Lösung der Differentialgleichung (16a) ist. Dann hat J die Form $J = q\,A\,r^w$, wobei q nur von den Werten a, b und c abhängt. Setzt man den Wert für ε_φ und J in Gl. (18) ein, so findet man

$$(q\,A)^{n-1}\,w\,r^{wn} + (q\,A)^{n-1}\,r^{wn}\,(2\,w+3)\,w\,n = 0.$$

Daraus folgt

$$1 + (2\,w+3)\,n = 0 \quad \text{oder} \quad w = -\frac{1+3\,n}{2\,n}$$

und es ist somit

$$\varepsilon_\varphi = -A\,r^{-\frac{1+3n}{2n}} \tag{20a}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (18). Dann wird weiters

$$u = r\,\varepsilon_\varphi = -A\,r^{-\frac{1+n}{2n}} \tag{20c}$$

und

$$\varepsilon_r = du/dr = \frac{1+n}{2\,n}\,A\,r^{-\frac{1+3n}{2n}}. \tag{20b}$$

Mit diesen Werten ergeben sich nach Gl. (13a) für σ_r und σ_φ die Ausdrücke

$$\sigma_r = 2\,M\,q^{n-1}\,A^n\,\frac{1}{n}\,r^{-\frac{1+3n}{2n}}, \qquad \sigma_\varphi = -2\,M\,q^{n-1}\,A^n\,\frac{1-3\,n}{2\,n}\,r^{-\frac{1+3n}{2n}}. \tag{21}$$

Diese Lösung erlaubt den Fall eines unendlich großen Bleches zu behandeln, bei welchem für den Lochrand $r = r_0$ die Zugspannungen $\sigma_r = p$ gegeben sind. Wegen des Verschwindens von $r^{-\frac{1+3n}{2n}}$ $(0 \leqq n \leqq 1)$ verschwinden auch σ_r und σ_φ für ein unendliches r. Die Bedingung $\sigma_r = p$ für $r = r_0$ ergibt für die Spannungen

$$\sigma_r = p\,\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2}} \quad \text{und} \quad \sigma_\varphi = p\,\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}\,\frac{1-3\,n}{2}. \tag{22}$$

Der Vergleich dieser Werte mit jenen in Gl. (21) ergibt für A

$$p\,r_0^{\frac{1+3n}{2}} = 2\,M\,q^{n-1}\,A^n\,\frac{1}{n} \quad \text{also} \quad A = \frac{1}{q}\left(\frac{n\,q}{2\,M}\,p\right)^{1/n} r_0^{\frac{1+3n}{2n}}. \tag{23}$$

Dann ergeben die Gl. (20) für die Dehnungen und Verschiebungen die folgenden Ausdrücke

$$\varepsilon_r = \frac{1+n}{2\,n\,q}\left(\frac{n\,q}{2\,M}\,p\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}, \tag{24a}$$

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{1}{q}\left(\frac{n\,q}{2\,M}\,p\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}, \tag{24b}$$

$$u = -\frac{1}{q}\left(\frac{n\,q}{2\,M}\,p\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}} \cdot r. \tag{24c}$$

Es erübrigt noch, den Wert q bei verschiedenen Annahmen für die Invariante J zu ermitteln. Zunächst setzen wir nach Prager und Hohenemser

$$J = \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)}{2}.$$

Dieser Wert stellt, solange ε_r und ε_φ verschiedenes Vorzeichen besitzen, wie dies bei uns stets der Fall ist, die größte Gleitung vor; er ist also sicherlich invariant. Man erhält damit

$$f(J) = 2\,M\,J^n = 2\,M\left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}{2}\right)^n. \tag{25}$$

Setzt man hierin die Werte von ε_r und ε_φ nach Gl. (20) ein, so bekommt man

$$J = \frac{1}{2}\,\frac{1+3\,n}{2\,n}\cdot A\,r^{-\frac{1+3n}{2n}} = q\,A\,r^{-\frac{1+3n}{2n}},$$

also $q = \frac{1}{2}\,\frac{1+3\,n}{2\,n}$ und damit nach den Gl. (24)

$$\varepsilon_r = 2\,\frac{1+n}{1+3n}\left(\frac{1+3n}{4}\,\frac{p}{2M}\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}. \tag{26a}$$

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{4}{1+3n}\left(\frac{1+3n}{4}\,\frac{p}{2M}\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}. \tag{26b}$$

$$u = -\frac{4}{1+3n}\left(\frac{1+3n}{4}\,\frac{p}{2M}\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}} r. \tag{26c}$$

Als eine zweite Annahme wählen wir, ebenfalls nach einem Vorschlage von Prager und Hohenemser

$$J = (-\varepsilon_r\,\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\varphi\,\varepsilon_z - \varepsilon_z\,\varepsilon_r)^{1/2} = [(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + 3\,\varepsilon_r\,\varepsilon_\varphi]^{1/2}.$$

Die Gl. (20) ergeben jetzt

$$J = A\sqrt{\frac{1+3n^2}{2n}}\,r^{-\frac{1+3n}{2n}} = A\,q\,r^{-\frac{1+3n}{2n}}.$$

Also ist in diesem Falle

$$q = \frac{\sqrt{1+3n^2}}{2}$$

und damit nach den Gl. (24)

$$\varepsilon_r = \frac{1+n}{\sqrt{1+3n^2}}\left(\frac{\sqrt{1+3n^2}}{2}\,\frac{p}{2M}\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}. \tag{27a}$$

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{2n}{\sqrt{1+3n^2}}\left(\frac{\sqrt{1+3n^2}}{2}\,\frac{p}{2M}\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}. \tag{27b}$$

$$u = -\frac{2n}{\sqrt{1+3n^2}}\left(\frac{\sqrt{1+3n^2}}{2n}\,\frac{p}{2M}\right)^{1/n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1+3n}{2n}}\cdot r. \tag{27c}$$

Aus den Gl. (22) für die Spannungen ist ersichtlich, daß bei dem angenommenen Spannungs-Gleitungsgesetz $\tau = 2\,M\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n$ die Spannungen unabhängig von der besonderen Wahl der Invariante sind. Es ist ferner bemerkenswert, daß für $n > 1/3$ die Spannungen σ_r und σ_φ verschiedene Vorzeichen besitzen. Ist $n = 1/3$, so werden die Tangentialspannungen $\sigma_\varphi = 0$. Für $n < 1/3$ haben σ_r und σ_φ dasselbe Vorzeichen; ist p eine Zugspannung, so treten überhaupt keine Druckspannungen auf. Zieht man aus einem ebenen Blech durch Einpressen eines runden Stempels zylindrische Näpfchen, so ist in dem unverformten Blech der vorstehend behandelte Spannungszustand vorhanden; ist für das Material $n < 1/3$, so entfällt die Ursache für die bekannte Faltenbildung beim Ziehen. Man findet weiters leicht bestätigt, daß die angegebenen Gleichungen für Spannungen und Verschiebungen bei $n = 1$, d. i. Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes in die bekannten Gleichungen:

$$\sigma_r = p\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \qquad \sigma_\varphi = -\,p\left(\frac{r_0}{r}\right)^2,$$

$$\varepsilon_r = \frac{p}{2G}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \qquad \varepsilon_y = -\,\frac{p}{2G}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \qquad u = -\,\frac{p}{2G}\left(\frac{r_0}{r}\right)\cdot r$$

übergehen, wobei jetzt für $2M = 2G$ gesetzt wurde; G bedeutet hierbei den Gleitmodul.

Zum Schlusse sei noch das Ergebnis für sehr kleine Werte von n diskutiert. Mit verschwindendem n nähert sich $\tau = 2\,M\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n$ dem Grenzwert $\tau = 2\,M = k$. Dadurch ist ein idealplastischer Werkstoff, der im elastischen Bereich nicht zusammendrückbar ist, beschrieben. Die Spannungen gehen dann in die Grenzwerte

$$\sigma_r = p\sqrt{\frac{r_0}{r}}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{1}{2}\,p\sqrt{\frac{r_0}{r}}$$

entsprechend den Gl. (22) über. Bei den Dehnungen und der Verschiebung kommt es je nach der Wahl von $\mathfrak{F}$ auf die Ausdrücke $\left(\frac{1}{4}\,\frac{p}{2M}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\right)^{1/n}$ nach den Gl. (26), bzw.

auf $\left(\frac{1}{2}\,\frac{p}{2\,M}\,\sqrt{\frac{r_0}{r}}\right)^{1/n}$ nach den Gl. (27) an. Will man im Grenzfall $n \to 0$ unendliche Dehnungen ausschalten, so darf p den Wert

$$p = 8\,M = 4\,k \quad \text{bzw.} \quad p = 4\,M = 2\,k$$

nicht überschreiten, wie mit $r_0/r = 1$ am Lochrand sofort folgt.

(Eingegangen am 21. Jänner 1946.)

Die dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung.

Von **K. Federhofer**, Graz.

Mit 5 Textabbildungen.

Einleitung.

Die Ermittlung der Spannungen in dünnen ebenen Platten, deren Durchbiegungen unter dem Einflusse von Lasten vergleichbar mit der Plattendicke oder noch erheblich größer als diese werden, wurde bisher nur in einem einzigen Falle, und zwar für die Kreisplatte mit gleichmäßig verteilter Belastung strenge durchgeführt. Dabei vereinfachen sich die beiden von Th. v. Kármán[1] angegebenen Grundgleichungen für dünne Platten mit großer Ausbiegung, die bei beliebigem Plattenumriß durch zwei partielle nicht lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung dargestellt sind, in zwei totale nicht lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integration mit Hilfe von Reihenentwicklungen von St. Way[2] für die am Rande eingeklemmte Kreisplatte geleistet worden ist. Seine numerischen Ergebnisse gestatten die Beurteilung des Verhaltens solcher Platten bis zu größten Einsenkungen, die etwa gleich dem 1,2-fachen der Plattendicke sind;* für noch größere Einsenkungsverhältnisse und für die am Rande verschieblich gelagerte Kreisplatte findet man die strenge Berechnung der Spannungen und Formänderungen in zwei Arbeiten des Verfassers.[3]

Häufig begnügt man sich bei der Berechnung solcher dünnen Platten damit, sie einfach als im unbelasteten Zustande nicht gespannte Membranen (Häute) zu betrachten, in die sie ja im Grenzfalle verschwindender Biegungssteifigkeit übergehen. Die hierfür geltenden, schon von A. Föppl[4] entwickelten beiden Grundgleichungen (die durch Nullsetzen der Biegungssteifigkeit aus den allgemeinen Kármánschen Gleichungen hervorgehen) wurden für die kreisförmige Membran von H. Hencky[5] durch Potenzreihen integriert, der auch die quadratische Membran[6] nach dem Verfahren von H. Marcus (Ersatz der Membran durch ein Gewebenetz und Anwendung der Differenzenrechnung) genähert behandelte. Die strenge Lösung der Grundgleichungen für die Kreisringmembran bei zwei bestimmten Belastungsannahmen verdankt man E. Schwerin;[7] für die nur am Innenrande belastete Kreisringmembrane konnte hierbei die Lösung der zugehörigen Grundgleichung — einer nicht linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung — streng in geschlossener Form dargestellt werden, so daß der bis dahin einzige, von A. Föppl[4] angegebene, geschlossen lösbare Fall des unendlich langen gleichmäßig belasteten Membranstreifens nicht mehr allein steht.

Durch die Untersuchungen von St. Way[2] und des Verfassers[3] wurde aber festgestellt, daß sich bei Berechnung einer dünnen vollen Kreisplatte beträchtliche Unterschiede in der Formänderung und in den Spannungen ergeben, wenn anstatt der genauen Theorie die einfachere Membrantheorie benutzt wird. Da ähnliche Verhält-

* Die Benutzung der linearen Kirchhoffschen Plattentheorie ist nach seinen Zahlenergebnissen bis zu größten Einsenkungen gleich dem 0,4fachen der Plattendicke zulässig; der Fehler in der Größe der Durchbiegung liegt dann noch unter 10%.

nisse auch bei der dünnen Kreisringplatte zu vermuten sind, so erscheint in Anbetracht der häufigen Verwendung von dünnen Kreisringplatten für Regelorgane und für Druckmeßinstrumente auch für diese eine schärfere Berechnung mit Berücksichtigung ihrer Biegungssteifigkeit erforderlich, die die Beurteilung der Zulässigkeit der Anwendung der Ringmembrantheorie ermöglicht. Diesem Zwecke dient die folgende Untersuchung, die sich vorerst nur auf den Fall der am Innenrand belasteten Ringplatte beschränkt; eine ähnliche Untersuchung für die gleichmäßig belastete Ringplatte bleibt einer folgenden Arbeit vorbehalten.

1. Die Grundgleichungen.

Die dünne Ringplatte (r_i, r_a Innen- und Außenhalbmesser) sei am Innenrand (Abb. 1) in einer mit P zentrisch belasteten starren Kreisscheibe eingespannt und am Außenrande festgehalten; sie sei im übrigen unbelastet, so daß lediglich der Innenrand mit $\frac{P}{2 r_i \pi}$ je Längeneinheit des Umfanges belastet ist.

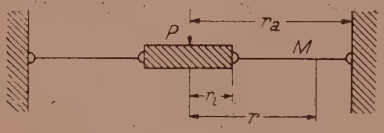

Abb. 1.

Die elastische Fläche, in die sich die Mittelebene der Ringplatte infolge der Belastung verformt, werde durch die radiale Verschiebung $v(r)$ eines Punktes M an der Stelle r und die Neigung $\varphi(r)$ der Meridiantangente festgelegt. Dann gilt für die Dehnungen ε_1 und ε_2 im Meridian und im Parallelkreise

$$\varepsilon_1 = \frac{dv}{dr} + \left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right), \quad \varepsilon_2 = \frac{v}{r}.$$

Die Krümmung $\varkappa_1$ des Meridians an der Stelle r beträgt $\varkappa_1 = \frac{d \sin\varphi}{dr}$, jene $\varkappa_2$ des an der Stelle r gelegten zweiten Hauptschnittes $\varkappa_2 = \frac{\sin\varphi}{r}$. Es gelten daher mit

$$\sin\varphi = u \tag{1}$$

die Formeln

$$\varepsilon_1 = \frac{dv}{dr} + \frac{u^2}{2}, \quad (2) \qquad \varkappa_1 = \frac{du}{dr}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{v}{r}, \quad (3) \qquad \varkappa_2 = \frac{u}{r}. \quad (5)$$

Bezeichnet ferner T_1 die Spannkraft, G_1 das Biegungsmoment im Meridianschnitt, T_2 und G_2 Spannkraft und Biegungsmoment im zweiten Hauptschnitte, so bestehen die bekannten Zusammenhänge

$$T_1 = \frac{12 D}{h^2}(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \qquad G_1 = -D(\varkappa_1 + \mu \varkappa_2),$$

$$T_2 = \frac{12 D}{h^2}(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1), \qquad G_2 = -D(\varkappa_2 + \mu \varkappa_1),$$

oder mit Benutzung der obigen Formeln

$$T_1 = \frac{12 D}{h^2}\left(\frac{dv}{dr} + \frac{u^2}{2} + \mu \frac{v}{r}\right), \quad (6) \qquad G_1 = -D\left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r}\right), \quad (8)$$

$$T_2 = \frac{12 D}{h^2}\left(\frac{v}{r} + \mu \frac{dv}{dr} + \mu \frac{u^2}{2}\right), \quad (7) \qquad G_2 = -D\left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr}\right). \quad (9)$$

Hierin bedeuten: E die Elastizitätszahl, μ die Poissonsche Zahl, h die Dicke der Platte, $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$ deren Biegungssteifigkeit.

Die Gleichgewichtsbedingungen für die am deformierten Plattenelemente wirkenden Spannkräfte und Biegungsmomente lauten

$$\frac{d}{dr}(r T_1) - T_2 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dr}(r G_1) - G_2 = \frac{N r}{\cos \varphi}, \tag{11}$$

$$r (T_1 \sin \varphi + N \cos \varphi) = \frac{P}{2\pi}, \tag{12}$$

wenn N die in der Meridiannormalen wirkende Querkraft bedeutet. Mit der Dimensionslosen

$$\varrho = \frac{r}{r_a} \tag{13}$$

ergibt sich als erste Gleichgewichtsgleichung

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho T_1) - T_2 = 0,$$

die durch Einführung einer dimensionslosen Funktion $\psi(\varrho)$ mit den Ansätzen

$$T_1 = \frac{D}{r_a^2}\frac{\psi}{\varrho}, \tag{14}$$

$$T_2 = \frac{D}{r_a^2}\frac{d\psi}{d\varrho} \tag{15}$$

erfüllt wird. Beseitigen wir aus den beiden Gl. (6) und (7) die radiale Verschiebung v und ihre Abgeleitete $\frac{dv}{dr}$, so entsteht bei Beachtung von (10)

$$\varrho \frac{d}{d\varrho}(T_1 + T_2) + \frac{E h}{2} w^2 = 0.$$

Diese Gleichung erhält mit Einführung einer zweiten dimensionslosen Funktion $\Phi(\varrho)$ gemäß

$$\Phi(\varrho) = 2\sqrt{3}\frac{r_a}{h} w(\varrho) \tag{16}$$

und mit dem homogenen Differentialoperator $L(\,) = \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho^2}$ die einfache Form

$$\underline{L(\psi) + \frac{1-\mu^2}{2}\frac{\Phi^2}{\varrho} = 0.} \tag{I}$$

Die zweite Grundgleichung für Φ und ψ ergibt sich durch Beseitigung der Querkraft N aus der zweiten und dritten der obigen Gleichgewichtsgleichungen unter Beachtung der Formeln für G_1, G_2 und T_1; es folgt nach längerer Rechnung

$$\underline{L(\Phi) - \frac{\Phi\psi}{\varrho} + \frac{\vartheta^*}{\varrho} = 0,} \tag{II}$$

worin ϑ^* eine von der Belastung P und von den Abmessungen der Ringplatte abhängige dimensionslose Größe ist, die durch

$$\vartheta^* = \frac{P}{\pi r_a E h} 12\sqrt{3}(1-\mu^2)\left(\frac{r_a}{h}\right)^3 \tag{17}$$

bestimmt ist. Die erste Grundgleichung enthält als einzige numerische Konstante die Poissonsche Zahl μ, während in der zweiten Grundgleichung nur die Belastungskennzahl ϑ^* auftritt.

2. Lösung der Grundgleichungen I und II.

Die simultanen, nicht linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (I) und (II) vereinfachen sich wesentlich in den beiden Grenzfällen der biegungsfesten Ringplatte ohne Membranwirkung und der reinen Ringmembran. Im ersten, der gewöhnlichen linearen Plattentheorie entsprechenden Falle scheidet Gl. (I) wegen $\psi = 0$ aus und es verbleibt als lineare Grundgleichung

$$L(\Phi) + \frac{\vartheta^*}{\varrho} = 0, \tag{IIa}$$

aus der die Funktion Φ durch zwei Quadraturen zu bestimmen ist.

Im zweiten Grenzfalle der vollkommen biegsamen Ringmembran vereinfacht sich die Grundgleichung (II) wegen des Fortfalles der Biegungsmomente [deren Bei-

trag durch das Glied $L(\Phi)$ zum Ausdruck kommt] in $-\Phi\,\psi + \vartheta^* = 0$, womit sich für die Funktion ψ gemäß (I) die nichtlineare Grundgleichung

$$\varrho\,\psi^2\,L(\psi) + \frac{1-\mu^2}{2}\,\vartheta^* = 0 \tag{Ib}$$

ergibt, mit deren Lösung die Membrankräfte nach (14) und (15) bestimmt sind.

Da für beide Grenzfälle die zugehörigen Grundgleichungen (IIa) bzw. (Ib) geschlossen integrierbar sind, so gewinnen wir Näherungslösungen der in strenger Form nicht integrierbaren Gl. (I) und (II), indem wir die darin vorkommenden nichtlinearen Glieder durch jene Werte ausdrücken, die sich aus einem der beiden Grenzfälle berechnen lassen und sodann die nun linearen Differentialgleichungen integrieren.

Verfahren a. Gehen wir vom ersten Grenzfall aus, so folgt für $\Phi(\varrho)$ aus (IIa)

$$\Phi(\varrho) = c_1\,\varrho + \frac{c_2}{\varrho} - \frac{\vartheta^*}{4}\,\varrho\,(2\ln\varrho - 1),$$

wobei die beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 durch die Art der Ausbildung der Plattenränder bestimmt sind.

Wir wollen hierbei zwei Fälle berücksichtigen.

Fall I: Innenrand ($\varrho = \varrho_i$) eingespannt, Außenrand ($\varrho_a = 1$) gelenkig befestigt mit den Randbedingungen

$$\Phi(\varrho_i) = 0, \quad \left(\frac{d\Phi}{d\varrho} + \mu\,\frac{\Phi}{\varrho}\right)_{\varrho=1} = 0.$$

Fall II: Innen- und Außenrand gelenkig befestigt mit den Randbedingungen

$$\frac{d\Phi}{d\varrho} + \mu\,\frac{\Phi}{\varrho} = 0 \text{ für } \varrho = \varrho_i \text{ und } \varrho = \varrho_a = 1.$$

Setzen wir

$$c_1 = \frac{\vartheta^*}{4}\,\zeta_1, \quad c_2 = \frac{\vartheta^*}{4}\,\zeta_2,$$

so kommt

$$\Phi(\varrho) = \frac{\vartheta^*}{4}\left[(\zeta_1 + 1)\,\varrho + \frac{\zeta_2}{\varrho} - 2\,\varrho\ln\varrho\right] \tag{18}$$

und es ergibt die Erfüllung der beiden Randbedingungen

im Fall I:

$$\zeta_1 + 1 = z_1 = \frac{2\left[(1-\mu)\,\varrho_i\ln\varrho_i + \frac{1}{\varrho_i}\right]}{\varrho_i\,(1-\mu) + \frac{1+\mu}{\varrho_i}},$$

$$\zeta_2 = \frac{2\,\varrho_i\,[(1+\mu)\ln\varrho_i - 1]}{\varrho_i\,(1-\mu) + \frac{1+\mu}{\varrho_i}},$$

im Fall II:

$$\zeta_1 + 1 = z_1 = \frac{2}{1+\mu} + \frac{1-\mu}{1+\mu}\,\zeta_2,$$

$$\zeta_2 = 2\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{\ln\varrho_i}{1 - \frac{1}{\varrho_i^2}}.$$

Diese nur von der Lochverhältniszahl ϱ_i abhängigen Konstanten können daher für verschiedene ϱ_i und μ ein für allemal tabuliert werden. Mit Benutzung des Ansatzes (18) folgt durch Integration der Grundgleichung (I), in welcher zur Abkürzung

$$\frac{1-\mu^2}{2} = m \tag{19}$$

gesetzt wird,

$$\psi(\varrho) = c_3\,\varrho + \frac{c_4}{\varrho} - \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32}\,\Gamma(\varrho),$$

worin

$$\Gamma(\varrho) = \frac{\varrho^3}{8}\,(7 + 6\,z_1 + 2\,z_1^2) - (1 + z_1)\,\zeta_2\,\varrho - \frac{\zeta_2}{2\,\varrho} - \zeta_2^2\,\frac{\ln\varrho}{\varrho} + 2\,\zeta_2\,(1 + z_1)\,\varrho\ln\varrho -$$
$$- \left(\frac{3}{2} + z_1\right)\varrho^3\ln\varrho - 2\,\zeta_2\,\varrho\,(\ln\varrho)^2 + \varrho^3\,(\ln\varrho)^2. \tag{20}$$

Die beiden Integrationskonstanten c_3, c_4 sind durch die Bedingung des Verschwindens

der radialen Verschiebung $v(\varrho)$ am Innen- und Außenrande bestimmt. Wegen $v = 0$ muß an den Rändern auch die Dehnung $\varepsilon_2 = 0$ sein und dies verlangt, daß

$$\frac{d\psi}{d\varrho} - \mu\frac{\psi}{\varrho} = 0 \text{ für } \varrho = \varrho_i \text{ und } \varrho = 1.$$

Setzen wir

$$c_3 = \bar{c}_3 \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32},$$

$$c_4 = \bar{c}_4 \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32},$$

so wird zunächst

$$\psi(\varrho) = \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32}\left[\bar{c}_3\,\varrho + \frac{\bar{c}_4}{\varrho} - \Gamma(\varrho)\right] = \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32}\,\bar{\psi}(\varrho), \tag{21}$$

woraus folgt

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32}\left[\bar{c}_3 - \frac{\bar{c}_4}{\varrho^2} - \frac{d\Gamma}{d\varrho}\right] = \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32}\,\frac{d\bar{\psi}(\varrho)}{d\varrho}, \tag{22}$$

so daß

$$\frac{d\psi}{d\varrho} - \mu\frac{\psi}{\varrho} = \frac{m\,\vartheta^{*2}}{32}\left[\bar{c}_3(1-\mu) - \frac{\bar{c}_4}{\varrho^2}(1+\mu) - \frac{d\Gamma}{d\varrho} + \mu\frac{\Gamma}{\varrho}\right].$$

Mit Einführung von

$$\Lambda(\varrho) = \frac{d\Gamma}{d\varrho} - \mu\frac{\Gamma}{\varrho}$$

liefert die Erfüllung der oben angeführten beiden Randbedingungen

$$(1-\mu)\,c_3 = \frac{\Lambda(\varrho_i) - \frac{1}{\varrho_i^2}\Lambda(1)}{1 - \frac{1}{\varrho_i^2}}, \qquad (1+\mu)\,\bar{c}_4 = \frac{\Lambda(\varrho_i) - \Lambda(1)}{1 - \frac{1}{\varrho_i^2}}. \tag{21a}$$

Hiermit können nun aus den Gl. (21) und (22) die Funktionswerte $\frac{\bar{\psi}}{\varrho}$ und $\frac{d\bar{\psi}}{d\varrho}$ zahlenmäßig berechnet werden und es sind damit die ihnen nach (14) und (15) verhältigen Membrankräfte T_1 und T_2 in erster Näherung bestimmt. Bei der noch erforderlichen schärferen Berechnung der Biegungsmomente und der Formänderung der Ringplatte ist die Beibehaltung des bisher in der Grundgleichung (II) vernachlässigten mittleren Gliedes $\frac{\Phi\,\psi}{\varrho}$ wesentlich. Trägt man hierin für ψ den in (21) gewonnenen Ausdruck ein, so scheitert die strenge Integration der dann entstehenden Differentialgleichung für Φ an der komplizierten Form von $\Gamma(\varrho)$. Machen wir dagegen als Näherungslösung für die Funktion $\Phi(\varrho)$ in Anlehnung an die frühere Lösung (18) den mit einer noch näher zu bestimmenden Konstanten C versehenen Ansatz

$$\Phi(\varrho) = C\left(z_1\,\varrho + \frac{\zeta_2}{\varrho} - 2\,\varrho\ln\varrho\right), \tag{23}$$

der die für $\Phi(\varrho)$ vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt, so entspricht ihm zufolge der Grundgleichung (I) eine Funktion

$$\psi(\varrho) = \frac{m\,C^2}{2}\left[\bar{c}_3\,\varrho + \frac{\bar{c}_4}{\varrho} - \Gamma(\varrho)\right] = \frac{m\,C^2}{2}\,\bar{\psi}(\varrho), \tag{24}$$

welche zufolge (21a) die für $\psi(\varrho)$ vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigt. Bezeichnet sodann $E(\varrho)$ den durch Eintragung dieser Funktionen Φ und ψ in die Gl. (II) sich ergebenden Ausdruck, der für die strenge Lösung gleich Null sein soll, so wird (II) für jenen Wert von C am besten erfüllt, welcher der Galerkinschen Vorschrift

$$\int_{\varrho=\varrho_i}^{\varrho=1} E(\varrho)\left(z_1\,\varrho + \frac{\zeta_2}{\varrho} - 2\,\varrho\ln\varrho\right)\varrho\,d\varrho = 0 \tag{25}$$

genügt. Die tatsächliche Durchführung der hiernach geforderten Integrationen würde eine sehr langwierige Rechnung erfordern, wenn man bei der Berechnung von $E(\varrho)$ die darin vorkommende Funktion $\psi(\varrho)$ nach Gl. (21) benützen wollte, denn diese Funktion ist allein schon durch einen zehngliedrigen Ausdruck (vgl. den Ansatz für Γ)

dargestellt; es läßt sich indes — wie die numerischen Rechnungen zeigten — die Funktion $\frac{\overline{\psi}}{\varrho}$ sehr gut annähern durch den einfachen Potenzansatz $\sum_{k=0}^{i} \frac{a_k}{\varrho^k}$, wobei es genügt, i je nach dem Lochverhältnis ϱ_i mit $i = 3$ (bei $\varrho_i = 0{,}1$ und $0{,}3$) bzw. $i = 2$ (bei $\varrho_i = 0{,}5$) und $i = 1$ (bei $\varrho_i = 0{,}7$) anzunehmen. Die größten Abweichungen von den genauen Werten $\frac{\overline{\psi}}{\varrho}$ bleiben dann noch unter 2%. Mit diesem Ansatz berechnet sich $E(\varrho)$ zu

$$E(\varrho) = (-4C + \vartheta^*)\frac{1}{\varrho} - \frac{m C^2}{2}\left(a_0 + \frac{a_1}{\varrho} + \frac{a_2}{\varrho^2} + \frac{a_3}{\varrho^3}\right)\left(z_1 \varrho + \frac{\zeta_2}{\varrho} - 2\varrho \ln \varrho\right),$$

womit die Bedingung (25) in die folgende kubische Gleichung für den Freiwert C übergeht

$$C + \frac{m C^3}{8} \frac{\sum_{k=0}^{i} a_k i_k}{\frac{z_1 + 1}{2}(1 - \varrho_i^2) - (\zeta_2 - \varrho_i^2)\ln \varrho_i} = \frac{\vartheta^*}{4}. \tag{26}$$

Hierin ist allgemein

$$i_k = \int_{\varrho_i}^{1} \left(z_1 \varrho + \frac{\zeta_2}{\varrho} - 2\varrho \ln \varrho\right)^2 \varrho^{1-k}\, d\varrho,$$

so daß

$$i_0 = \left\{ z_1^2 \frac{\varrho^4}{4} + \zeta_2^2 \ln \varrho + \varrho^4 (\ln \varrho)^2 - \frac{1}{2}\varrho^4 \ln \varrho + \frac{\varrho^4}{8} z_1 \zeta_2 \varrho^2 - \zeta_2 (2\varrho^2 \ln \varrho - \varrho^2) - \right.$$
$$\left. - z_1 \left(\varrho^4 \ln \varrho - \frac{\varrho^4}{4}\right) \right\}_{\varrho_i}^{1},$$

$$i_1 = \left\{ z_1^2 \frac{\varrho^3}{3} - \frac{\zeta_2^2}{\varrho} + \frac{4}{3}\varrho^3 (\ln \varrho)^2 - \frac{8}{9}\varrho^3 \ln \varrho + \frac{8}{27}\varrho^3 + 2 z_1 \zeta_2 \varrho - \right.$$
$$\left. - 4\zeta_2 (\varrho \ln \varrho - \varrho) - 4 z_1 \left(\frac{\varrho^3}{3} \ln \varrho - \frac{\varrho^3}{9}\right) \right\}_{\varrho_i}^{1},$$

$$i_2 = \left\{ z_1^2 \frac{\varrho^2}{2} - \frac{\zeta_2^2}{2\varrho^2} + 2\varrho^2 (\ln \varrho)^2 - 2\varrho^2 \ln \varrho + \varrho^2 + 2 z_1 \zeta_2 \ln \varrho - 2\zeta_2 (\ln \varrho)^2 - \right.$$
$$\left. - z_1 (2\varrho^2 \ln \varrho - \varrho^2) \right\}_{\varrho_i}^{1}$$

und

$$i_3 = \left\{ z_1^2 \varrho - \frac{\zeta_2^2}{3\varrho^3} + 4\varrho (\ln \varrho)^2 - 8\varrho \ln \varrho + 8\varrho - \frac{2 z_1 \zeta_2}{\varrho} + \frac{4\zeta_2}{\varrho} (\ln \varrho + 1) - \right.$$
$$\left. - 4 z_1 \varrho (\ln \varrho - 1) \right\}_{\varrho_i}^{1}.$$

Sind die Funktionswerte $\frac{\overline{\psi}}{\varrho}$ und $\Phi(\varrho)$ für hinreichend viele Argumente zahlenmäßig berechnet worden, so erweist sich übrigens die unmittelbare numerische Durchführung der in (25) geforderten Integrationen bei Verzicht auf die allgemeine Darstellung (26) am bequemsten. Für den Lagerungsfall II wurde die Rechnung auf diesem Wege mit einem Intervall der ϱ-Werte von 0,1 durchgeführt. Die in gleicher Weise für den Fall I vorgenommene numerische Integration von (25) führte zu sehr guter Übereinstimmung mit den nach Gl. (26) berechneten Werten.

Für kleine Durchbiegungen, wie sie bei der gewöhnlichen Plattentheorie betrachtet werden, kann das den Faktor C^3 enthaltende Glied in (26) gestrichen werden und wir kommen mit $C = \frac{\vartheta^*}{4}$ zurück auf die Ausgangslösung (18). Mit dem durch (26) bestimmten verbesserten Wert C läßt sich nun die Durchbiegung $w(r)$ der Ringplatte an der Stelle r berechnen. Es ist $-\frac{dw}{dr} = u$ oder wegen (16)

$$-dw = \frac{h}{2\sqrt{3}} \Phi(\varrho)\, d\varrho,$$

woraus sich $w(\varrho)$ bei Beachtung des Ansatzes (23) mit der Randbedingung $w(1) = 0$ zu

$$w(\varrho) = \frac{h C}{2\sqrt{3}}\left[(z_1 + 1)\frac{1 - \varrho^2}{2} - \zeta_2 \ln \varrho + \varrho^2 \ln \varrho\right]$$

berechnet. Hiernach beträgt das Einsenkungsverhältnis $\frac{w(\varrho)}{h}$ am Innenrand $\varrho = \varrho_i$

$$\frac{w_i}{h} = \frac{C}{2\sqrt{3}}\left[(z_1 + 1)\,\frac{1-\varrho_i^2}{2} - (\zeta_2 - \varrho_i^2)\ln\varrho_i\right]. \qquad (27)$$

Für die vollkommen biegsame Ringmembran findet E. Schwerin[7] nach strenger Integration der Gl. (Ib)

$$w_i = r_a\,\omega_i \sqrt[3]{\frac{P}{\pi\, r_a\, E\, h}},$$

woraus für das Einsenkungsverhältnis $\frac{w_i}{h}$ mit Einführung der durch (17) definierten Belastungskennzahl ϑ^* die Formel

$$\frac{w_i}{h} = \frac{\omega_i}{\sqrt[3]{12\,(1-\mu^2)\sqrt{3}}}\sqrt[3]{\vartheta^*}$$

entsteht. Die von der Innenlochzahl ϱ_i der Ringmembran abhängigen Zahlen ω_i sind in der Arbeit Schwerins mit der Annahme $\mu = 0{,}3$ (was ungefähr dem Mittel der Poissonschen Zahlen 1/3 und 1/4 entspricht) berechnet zu

$\omega_i = 1{,}143\quad 0{,}802\quad 0{,}540\quad 0{,}3095\quad 0{,}0984$

für

$\varrho_i = 0{,}1\quad 0{,}3\quad 0{,}5\quad 0{,}7\quad 0{,}9$

so daß $\frac{w_i}{h}$ mit $\mu = 0{,}3$ endgültig aus

$$\frac{w_i}{h} = 0{,}37533\,\omega_i \sqrt[3]{\vartheta^*} \qquad (28)$$

berechnet werden kann.

In den Abb. 2 bis 5 ist die durch (27) und (26) gekennzeichnete Abhängigkeit des Einsenkungsverhältnisses $\frac{w_i}{h}$ vom Belastungskennwert ϑ^* für die Innenlochzahlen $\varrho_i = 0{,}1$, 0,3, 0,5, 0,7 mit den Annahmen $\mu = 1/3$ und $\mu = 1/4$ graphisch dargestellt, wobei auch jedesmal die der Gl. (28) entsprechende kubische Parabel (Fall III) eingetragen ist, so daß die bei der Berechnung der Formänderung nach der reinen Membrantheorie sich ergebenden sehr beträchtlichen Abweichungen von jenen viel kleineren Werten unmittelbar abgelesen werden können, welche die Berücksichtigung der Biegungssteifigkeit der Ringplatte liefert. Für kleine Kennwerte ϑ^* gelten die der gewöhnlichen Plattentheorie entsprechenden, in den Abb. 2 bis 5 eingezeichneten geradlinigen Diagramme.

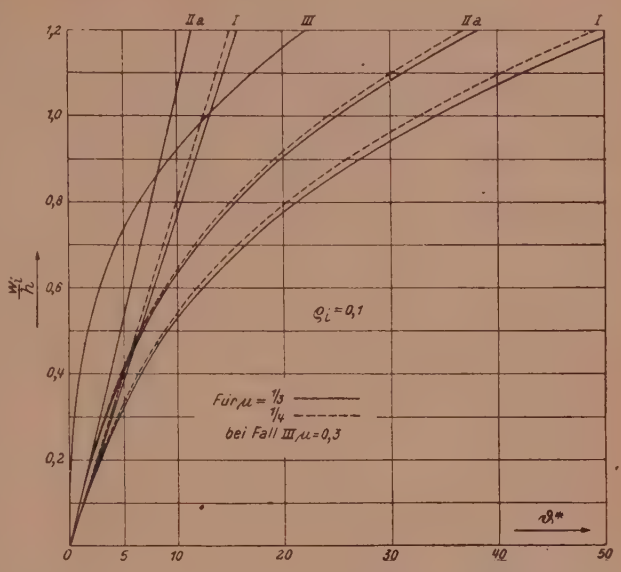

Abb. 2. Abhängigkeit des Einsenkungsverhältnisses w_i/h vom Belastungskennwert ϑ^* für die Innenlochzahl $\varrho_i = 0{,}1$.

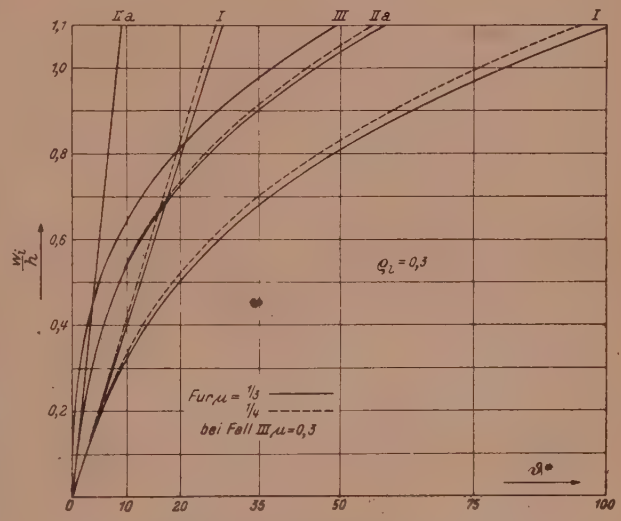

Abb. 3. Abhängigkeit des Einsenkungsverhältnisses w_i/h vom Belastungskennwert ϑ^* für die Innenlochzahl $\varrho_i = 0{,}3$.

Verfahren b. Ausgehend von dem zweiten Grenzfall der vollkommen biegsamen Ringmembran gelangt man, sofern für die Querzahl μ der Sonderwert 1/3 angenommen wird, zu einer recht einfachen Näherungslösung der Grundgleichungen (I) und (II), die zu bequemen Formeln für die Berechnung der Einsenkungen und Spannungen führt.

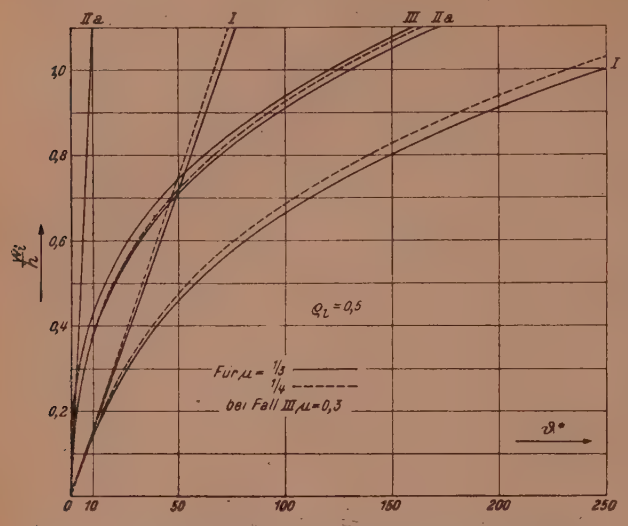

Abb. 4. Abhängigkeit des Einsenkungsverhältnisses $w_{i/h}$ vom Belastungskennwert ϑ^* für die Innenlochzahl $\varrho_i = 0{,}5$.

Der Potenzansatz

$$\psi(\varrho) = B\,\varrho^{1/3}, \qquad (29)$$

in welchem B einen noch zu bestimmenden konstanten Beiwert bedeutet, erfüllt die Bedingung des Verschwindens der radialen Verschiebungen am Außen- und Innenrande der Ringplatte, sobald $\mu = 1/3$ gesetzt wird. Denn diesem Ansatze entsprechen nach (14) und (15) die Membrankräfte

$$T_1 = \frac{D}{r_a^2}\,B\,\varrho^{-2/3}$$

und

$$T_2 = \frac{1}{3}\,\frac{D}{r_a^2}\,B\,\varrho^{-2/3}, \qquad (30)$$

somit ist $T_2 = 1/3\ T_1$ und es wird daher die mit der radialen Verschiebung verhältige tangentielle Dehnung $\varepsilon_2 = \frac{1}{E\,h}(T_2 - \mu\,T_1)$ im Falle $\mu = 1/3$ an allen Stellen der Ringplatte gleich Null, d. h. jeder Punkt der Ringplatte erfährt dann nur eine Verschiebung senkrecht zur Plattenebene.

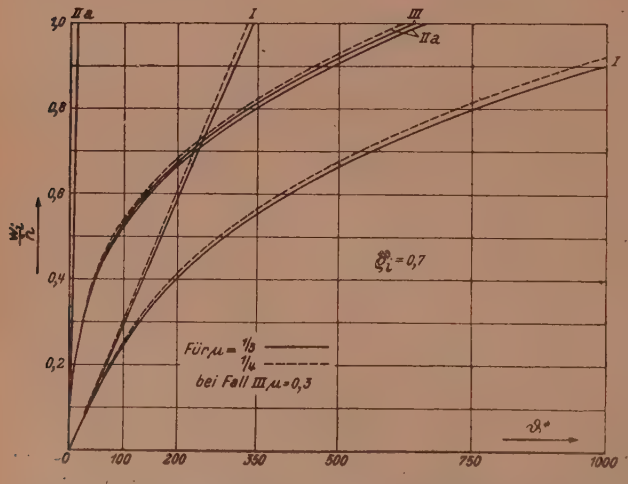

Abb. 5. Abhängigkeit des Einsenkungsverhältnisses $w_{i/h}$ vom Belastungskennwert ϑ^* für die Innenlochzahl $\varrho_i = 0{,}7$.

Mit dem Ansatze (29) liefert die Grundgleichung (I)

$$\Phi(\varrho) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\,B}{m}}\,\varrho^{-1/3}, \qquad (31)$$

so daß sich das radiale Biegungsmoment G_1 aus (8) und (16) zu

$$G_1 = -\frac{D}{r_a^2}\,\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\,B}{m}}\left(\mu - \frac{1}{3}\right)\varrho^{-4/3}$$

berechnet. Im Falle $\mu = 1/3$ verschwindet demnach G_1 überhaupt, so daß mit (31) jedenfalls die Bedingung einer gelenkigen Festhaltung des Innen- und Außenrandes erfüllt ist.

Da zufolge (29) und (31)

$$\Phi\,\psi = \frac{2}{3}\,B\sqrt{\frac{2\,B}{m}} = \text{konstant},$$

so genügen die Ansätze (29) und (31) der für die vollkommen biegsame Membran geltenden vereinfachten Grundgleichung (II) ($\Phi\,\psi = \vartheta^*$), sobald

$$B = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9\,m\,\vartheta^{*2}}$$

gesetzt wird; diese Ansätze sind daher mit dem vorstehenden Werte von B eine partikuläre Lösung von (I) und (II) im Falle der Ringmembrane.*

Geht man aber mit dem Ansatze (29) für $\psi(\varrho)$ in die vollständige Grundgleichung (II) der Ringplatte, so läßt sie sich mit Einführung einer neuen Veränderlichen $\xi(\varrho)$ gemäß

$$\xi(\varrho) = \frac{3}{2}\sqrt{B}\,\varrho^{2/3}$$

überführen in die Besselsche Gleichung

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\Phi}{d\xi} - \Phi\left(1 + \frac{9}{4\,\xi^2}\right) = -\frac{A}{\sqrt{\xi}}, \tag{32}$$

worin

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\vartheta^*}{B^{3/4}}$$

ist. Die zu (32) gehörige homogene Differentialgleichung hat als Hauptsystem von Lösungen die beiden Besselschen Funktionen erster Art $J_{3/2}(i\,\xi)$ und $J_{-3/2}(i\,\xi)$ (i imaginäre Einheit), für die — da der Parameter die Hälfte einer ungeraden Zahl ist — eine geschlossene Darstellung mit Benutzung der Hyperbelfunktionen möglich ist. Hiermit läßt sich das vollständige Integral der inhomogenen Differentialgleichung (32) nach längerer Rechnung, die hier übergangen werden soll, darstellen durch

$$\Phi(\xi)\sqrt{\xi} = C_1\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\xi} - \mathfrak{Cof}\,\xi\right] + C_2\left[\mathfrak{Sin}\,\xi - \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi}\right] +$$

$$+ A\left[\mathfrak{Cof}\,\xi\,\mathfrak{Ci}(\xi) - \mathfrak{Sin}\,\xi\,\mathfrak{Si}(\xi) + \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi\,\mathfrak{Si}(\xi) - \mathfrak{Sin}\,\xi\,\mathfrak{Ci}(\xi)}{\xi} - 1\right], \tag{33}$$

wo C_1, C_2 die beiden Integrationskonstanten bedeuten und $\mathfrak{Si}(\xi)$, $\mathfrak{Ci}(\xi)$ durch

$$\mathfrak{Si}(\xi) = \int \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\xi}\,d\xi, \qquad \mathfrak{Ci}(\xi) = \int \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi}\,d\xi$$

bestimmt sind. Verfügt man über die Konstanten C_1, C_2 so, daß die Bedingung gelenkiger Festhaltung der beiden Ränder erfüllt wird, so sind mit (31) und (33) zwei voneinander verschiedene, aber zum gleichen Ansatze von $\psi(\varrho)$ gehörige Lösungen für $\Phi(\varrho)$ gewonnen, welche die Randbedingungen befriedigen, und es kann der noch offene Freiwert B etwa aus der Bedingung ermittelt werden, daß beide Lösungen zur gleichen Einsenkung am Innenrande führen sollen. Damit erhielte man eine außerordentlich komplizierte transzendente Gleichung für B, deren numerische Lösung noch dadurch erschwert wäre, daß B auch im Argument ξ enthalten ist. Wir verzichten auf die Durchführung dieser Rechnung und berechnen B auf viel einfacherem Wege durch die Erwägung, daß die Grundgleichung (II) mit den Ansätzen (29) und (31) durch jenen Wert B am besten erfüllt wird, der der Galerkinschen Forderung

$$\int_{\varrho_i}^{1} E(\varrho)\,\varrho^{-1/2}\cdot\varrho\,d\varrho = 0$$

entspricht, wo $E(\varrho)$ die mit Benutzung der Ansätze (29) und (31) gerechnete linke Seite der Gl. (II) bedeutet. Hieraus folgt, wenn

$$\sqrt{\frac{2\,B}{m}} = B_1 \quad \text{und} \quad \varrho_i^{2/3} = \alpha$$

---

* Diese Partikularlösung stellt nach Schwerin (s. Literatur 7) den Grenzfall dar, dem sich die strengen Lösungen der Grundgleichungen einer Ringmembrane für alle Werte $\mu < 1/3$ nähern; für $\mu > 1/3$ haben diese Gleichungen keine reellen Lösungen, woraus Schwerin schließt, daß dann der vorausgesetzte axialsymmetrische Spannungszustand nicht mehr möglich ist und ein wellenförmiges Ausbeulen der Membran eintritt. Bei Zugrundelegung der vollständigen Grundgleichungen I und II, d. h. bei Berücksichtigung der Biegungssteifigkeit der Ringplatte, verliert aber der Fall $\mu = 1/3$ diese Sonderstellung.

gesetzt wird, für B_1 die kubische Gleichung

$$B_1^3 + \frac{16}{9\,m\,\alpha} B_1 - \frac{3}{m}\,\vartheta^* = 0. \tag{34}$$

Aus $-dw = \frac{h}{2\sqrt{3}}\,\Phi(\varrho)\,d\varrho$ (vgl. S. 26) berechnet sich die Einsenkung $w(\varrho)$ zu

$$w(\varrho) = \frac{h\,B_1}{2\sqrt{3}}\,(1 - \varrho^{2/3})$$

und es ergibt sich für das Einsenkungsverhältnis $\frac{w(\varrho)}{h}$ am Innenrande die einfache Formel

$$\frac{w_i}{h} = \frac{B_1}{2\sqrt{3}}\,(1-\alpha). \tag{35}$$

Die hiernach gerechneten, in der Zahlentafel 1 unter Fall IIb eingetragenen Werte $\frac{w_i}{h}$ stehen — wie diese Zahlentafel zeigt — im Bereiche $\varrho_i \leqq 0{,}3$ in praktisch vollkommener Übereinstimmung mit jenen Werten $\frac{w_i}{h}$, die aus der Gl. (27) — ausgehend vom Grenzfalle der biegungssteifen Ringplatte — für den Lagerungsfall IIa erhalten wurden; lediglich im Bereiche $\varrho_i < 0{,}3$ ergeben sich bei kleinen Kennzahlen ϑ^* geringfügige Abweichungen. Es darf aber nicht übersehen werden, daß Gl. (42) nur für $\mu = 1/3$ gültig ist, während die Gl. (27) frei von dieser Beschränkung ist.

Zahlentafel 1. Einsenkungsverhältnisse $\frac{w_i}{h}$ für Fall IIa und IIb (mit $\mu = 1/3$) und für Fall III (reine Membran) mit $\mu = 0{,}3$.

ϱ_i	Fall	ϑ^*	4	8	12	16	20	30	40	50
0,1	IIa	$\frac{w_i}{h}$	0,3501	0,5582	0,7016	0,8127	0,9046	1,0854	1,2260	1,3428
	IIb		0,3008	0,5152	0,6709	0,7933	0,8947	1,0943	1,2488	1,3768
	III		0,6810	0,8580	0,9822	1,0810	1,1645	1,3330	1,4672	1,5804
ϱ_i	Fall	ϑ^*	5	10	20	25	30	50	70	100
0,3	IIa	$\frac{w_i}{h}$	0,3757	0,5354	0,7260	0,7953	0,8551	1,0405	1,1789	1,3417
	IIb		0,3731	0,5337	0,7253	0,7949	0,8550	1,0412	1,1800	1,3435
	III		0,5147	0,6485	0,8171	0,8802	0,9353	1,1089	1,2406	1,3972
ϱ_i	Fall	ϑ^*	10	25	50	70	100	150	200	250
0,5	IIa	$\frac{w_i}{h}$	0,3799	0,5495	0,7113	0,8030	0,9113	1,0501	1,1601	1,2527
	IIb		0,3798	0,5495	0,7113	0,8030	0,9113	1,0501	1,1601	1,2528
	III		0,4367	0,5926	0,7467	0,8353	0,9408	1,0769	1,1853	1,2768
ϱ_i	Fall	ϑ^*	100	200	300	350	500	750	1000	
0,7	IIa	$\frac{w_i}{h}$	0,5241	0,6658	0,7647	0,8059	0,9095	1,0430	1,1491	
	IIb		0,5241	0,6658	0,7647	0,8059	0,9095	1,0430	1,1491	
	III		0,5392	0,6793	0,7776	0,8187	0,9220	1,0554	1,1616	

3. Berechnung der Spannungen.

Es überlagern sich die von den Biegungsmomenten G_1, G_2 und von den Spannkräften T_1, T_2 erzeugten Spannungen. Aus den Formeln (8) und (9) berechnen sich bei Beachtung von (16) die Biegungsmomente zu

$$G_1 = -\frac{D\,h}{r_a^2\,2\sqrt{3}}\left(\frac{d\Phi}{d\varrho} + \mu\frac{\Phi}{\varrho}\right),\quad G_2 = -\frac{D\,h}{r_a^2\,2\sqrt{3}}\left(\frac{\Phi}{\varrho} + \mu\frac{d\Phi}{d\varrho}\right);$$

Zahlentafel 2. Die Spannungswerte γ_1, γ_2, τ_1, τ_2 für den Außen- und Innenrand (Gl. 38, 40—44).

Lochverhältniszahl $\varrho_i = 0{,}1$			Fall	Belastungskennzahl ϑ^* 4	8	12	16	20	30	40	50
Außenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^a	I	0,045	0,126	0,210	0,291	0,366	0,540	0,696	0,842
			IIa	0,061	0,156	0,246	0,330	0,408	0,588	0,750	0,898
			IIb	0,037	0,156	0,183	0,255	0,324	0,486	0,636	0,771
			III	0,180	0,287	0,376	0,455	0,528	0,692	0,839	0,974
		tangential $\tau_2^a = \mu\,\tau_1^a$	I	0,015	0,042	0,070	0,097	0,122	0,180	0,232	0,281
			IIa	0,020	0,052	0,082	0,110	0,136	0,196	0,250	0,299
			IIb	0,012	0,052	0,061	0,085	0,108	0,162	0,212	0,257
			III	0,054	0,086	0,113	0,137	0,159	0,208	0,252	0,292
	Biegungseinfluß	radial γ_1^a	gleich Null für alle vier Fälle								
		tangential γ_2^a	I	0,181	0,303	0,390	0,458	0,514	0,624	0,709	0,780
			IIa	0,198	0,315	0,396	0,459	0,511	0,613	0,692	0,758
			IIb	0,128	0,262	0,285	0,337	0,380	0,465	0,531	0,585
			III	0	0	0	0	0	0	0	0
Innenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^i	I	0,106	0,300	0,489	0,673	0,848	1,251	1,617	1,956
			IIa	0,182	0,463	0,732	0,982	1,217	1,752	2,235	2,682
			IIb	0,171	0,718	0,849	1,186	1,509	2,257	2,949	3,573
			III	0,870	1,381	1,809	2,192	2,543	3,333	4,038	4,685
		tangential $\tau_2^i = \mu\,\tau_1^i$	I	0,035	0,100	0,163	0,224	0,283	0,417	0,539	0,652
			IIa	0,061	0,154	0,244	0,327	0,406	0,584	0,745	0,894
			IIb	0,057	0,239	0,283	0,395	0,503	0,752	0,983	1,191
			III	0,261	0,414	0,543	0,658	0,763	1,000	1,211	1,406
	Biegungseinfluß	radial γ_1^i	I	1,469	2,458	3,161	3,710	4,164	5,057	5,749	6,323
			gleich Null für die Fälle IIa, IIb und III								
		$\gamma_2^i = \mu\,\gamma_1^i$ tangential γ_2^i	I	0,490	0,819	1,054	1,237	1,388	1,686	1,916	2,108
			IIa	1,863	2,971	3,735	4,326	4,815	5,778	6,526	7,148
			IIb	2,753	5,648	6,141	7,261	8,190	10,017	11,431	12,602
			III	0	0	0	0	0	0	0	0

mit Benutzung des beim Verfahren (a) benutzten Ansatzes (23) für $\Phi(\varrho)$ folgt hieraus

$$G_1 = -\frac{E\,h^2}{24\sqrt{3}\,(1-\mu^2)}\,\frac{h^2}{r_a^2}\,C\,g_1, \quad G_2 = -\frac{E\,h^2}{24\sqrt{3}\,(1-\mu^2)}\,\frac{h^2}{r_a^2}\,C\,g_2, \tag{36}$$

worin die Zahlenwerte g_1, g_2 bestimmt sind durch

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= z_1\,(1+\mu) - 2 - \frac{\zeta_2}{\varrho^2}\,(1-\mu) - 2\,(1+\mu)\ln\varrho, \\ g_2 &= z_1\,(1+\mu) - 2\,\mu + \frac{\zeta_2}{\varrho^2}\,(1-\mu) - 2\,(1+\mu)\ln\varrho. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die von diesen Biegungsmomenten in den Randfasern $\pm\frac{h}{2}$ erzeugten Biegungsspannungen berechnen sich aus $\frac{6\,G_1}{h^2}$ bzw. $\frac{6\,G_2}{h^2}$ zu

$$\mp E\,\frac{h^2}{r_a^2}\,\gamma_1 \text{ bzw. } \mp E\,\frac{h^2}{r_a^2}\,\gamma_2,$$

Zahlentafel 3. Die Spannungswerte γ_1, γ_2, τ_1, τ_2 für den Außen- und Innenrand (Gl. 38, 40—44).

Lochverhältniszahl $\varrho_i = 0{,}3$			Fall	Belastungskennzahl ϑ^* 5	10	20	25	30	50	70	100
Außenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^a	I	0,036	0,111	0,276	0,354	0,429	0,705	0,952	1,284
			IIa	0,117	0,240	0,441	0,528	0,612	0,903	1,161	1,503
			IIb	0,114	0,234	0,432	0,519	0,600	0,891	1,143	1,482
			III	0,210	0,333	0,530	0,613	0,693	0,973	1,220	1,547
		tangential $\tau_2^a = \mu\,\tau_1^a$	I	0,012	0,037	0,092	0,118	0,143	0,235	0,317	0,428
			IIa	0,039	0,080	0,147	0,176	0,204	0,301	0,387	0,501
			IIb	0,038	0,078	0,144	0,173	0,200	0,297	0,381	0,494
			III	0,063	0,100	0,159	0,184	0,208	0,292	0,366	0,464
	Biegungseinfluß	radial γ_1^a	gleich Null für alle vier Fälle								
		tangential γ_2^a	I	0,167	0,293	0,460	0,522	0,575	0,737	0,856	0,994
			IIa	0,243	0,346	0,470	0,515	0,553	0,673	0,763	0,868
			IIb	0,225	0,322	0,438	0,480	0,516	0,629	0,713	0,811
			III	0	0	0	0	0	0	0	0
Innenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^i	I	0,065	0,200	0,494	0,635	0,770	1,266	1,707	2,303
			IIa	0,254	0,516	0,949	1,139	1,316	1,949	2,502	3,241
			IIb	0,255	0,522	0,964	1,157	1,339	1,986	2,551	3,306
			III	0,479	0,760	1,206	1,400	1,581	2,222	2,781	3,527
		tangential $\tau_2^i = \mu\,\tau_1^i$	I	0,022	0,067	0,165	0,212	0,257	0,422	0,569	0,768
			IIa	0,085	0,172	0,316	0,380	0,439	0,650	0,834	1,080
			IIb	0,085	0,174	0,321	0,386	0,446	0,662	0,850	1,102
			III	0,144	0,228	0,362	0,420	0,474	0,667	0,834	1,058
	Biegungseinfluß	radial γ_1^i	I	1,036	1,814	2,852	3,233	3,562	4,567	5,304	6,160
			gleich Null für die Fälle IIa, IIb und III								
		$\gamma_2^i = \mu\,\gamma_1^i$ tangential γ_2^i	I	0,345	0,605	0,951	1,078	1,187	1,522	1,768	2,053
			IIa	1,036	1,477	2,002	2,194	2,359	2,870	3,252	3,701
			IIb	1,122	1,605	2,181	2,391	2,572	3,131	3,549	4,041
			III	0	0	0	0	0	0	0	0

worin die von der Belastungszahl ϑ^* und von ϱ_i abhängigen Zahlenwerte γ_1 und γ_2 durch

$$\gamma_1 = \frac{C\,g_1}{4\sqrt{3}\,(1-\mu^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{C\,g_2}{4\sqrt{3}\,(1-\mu^2)} \tag{38}$$

bestimmt sind. Da am Innenrand im Falle I wegen $\Phi(\varrho_i) = 0$ der Zusammenhang $G_2^i = \mu\,G_1^i$ besteht, so gilt auch $\gamma_2^i = \mu\,\gamma_1^i$.

Für die von der Membranwirkung herrührenden Spannkräfte T_1, T_2 liefern die Gl. (14) und (15) in Verbindung mit (24)

$$T_1 = \frac{E\,h}{48}\,\frac{h^2}{r_a^2}\,C^2\,\frac{\bar{\psi}}{\varrho}, \quad T_2 = \frac{E\,h}{48}\,\frac{h^2}{r_a^2}\,C^2\,\frac{d\bar{\psi}}{d\varrho}; \tag{39}$$

es betragen daher die ihnen entsprechenden Membranspannungen

$$E\,\frac{h^2}{r_a^2}\,\tau_1, \quad E\,\frac{h^2}{r_a^2}\,\tau_2,$$

Zahlentafel 4. Die Spannungswerte γ_1, γ_2, τ_1, τ_2 für den Außen- und Innenrand (Gl. 38, 40—44).

Lochverhältniszahl $\varrho_i = 0{,}5$			Fall	Belastungskennzahl ϑ^*							
				10	25	50	70	100	150	200	250
Außenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^a	I	0,042	0,195	0,486	0,705	1,011	1,473	1,890	2,274
			IIa	0,264	0,552	0,924	1,179	1,518	2,016	2,460	2,868
			IIb	0,264	0,552	0,924	1,176	1,515	2,013	2,457	2,865
			III	0,336	0,620	0,983	1,230	1,560	2,048	2,477	2,876
		tangential $\tau_2^a = \mu\,\tau_1^a$	I	0,014	0,065	0,162	0,235	0,337	0,491	0,630	0,758
			IIa	0,088	0,184	0,308	0,393	0,506	0,672	0,820	0,956
			IIb	0,088	0,184	0,308	0,392	0,505	0,671	0,819	0,955
			III	0,101	0,186	0,295	0,369	0,468	0,614	0,743	0,863
	Biegungseinfluß	radial γ_1^a	gleich Null für alle vier Fälle								
		tangential γ_2^a	I	0,185	0,397	0,625	0,753	0,902	1,088	1,232	1,352
			IIa	0,347	0,503	0,650	0,734	0,833	0,960	1,061	1,146
			IIb	0,342	0,495	0,641	0,723	0,821	0,946	1,045	1,129
			III	0	0	0	0	0	0	0	0
Innenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^i	I	0,063	0,288	0,714	1,037	1,487	2,163	2,775	3,341
			IIa	0,418	0,874	1,464	1,866	2,404	3,192	3,895	4,542
			IIb	0,418	0,875	1,466	1,869	2,407	3,196	3,901	4,549
			III	0,542	0,998	1,584	1,982	2,514	3,295	3,990	4,631
		tangential $\tau_2^i = \mu\,\tau_1^i$	I	0,021	0,096	0,238	0,346	0,496	0,721	0,925	1,113
			IIa	0,139	0,291	0,488	0,622	0,801	1,064	1,298	1,514
			IIb	0,139	0,291	0,488	0,623	0,802	1,065	1,300	1,516
			III	0,163	0,299	0,475	0,595	0,754	0,989	1,197	1,389
	Biegungseinfluß	radial γ_1^i	I	1,212	2,599	4,093	4,934	5,907	7,126	8,071	8,856
			gleich Null für die Fälle IIa, IIb und III								
		$\gamma_2^i = \mu\,\gamma_1^i$ tangential γ_2^i	I	0,404	0,866	1,364	1,645	1,969	2,375	2,690	2,952
			IIa	0,848	1,227	1,588	1,792	2,034	2,344	2,589	2,796
			IIb	0,862	1,247	1,615	1,823	2,068	2,384	2,633	2,844
			III	0	0	0	0	0	0	0	0

wobei die Zahlenwerte τ_1, τ_2 durch

$$\tau_1 = \frac{C^2}{48}\,\frac{\bar{\psi}}{\varrho}, \qquad \tau_2 = \frac{C^2}{48}\,\frac{d\bar{\psi}}{d\varrho} \tag{40}$$

bestimmt sind. Für die beiden Ränder gelten wegen $\varepsilon_2 = \frac{1}{E\,h}\,(T_2 - \mu\,T_1) = 0$ die Zusammenhänge $\tau_2^a = \mu\,\tau_1^a$ und $\tau_2^i = \mu\,\tau_1^i$.

Legt man der Berechnung der oben erklärten Spannungsbeiwerte die beim Verfahren b benützten Ansätze (29) und (31) zugrunde, so ergeben sich die einfachen Formeln

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = \frac{B_1}{6\sqrt{3}}\,\varrho^{-4/3} \quad \text{für die Biegungswirkung,}$$

$$\tau_1 = \frac{B_1^2}{48}\,\varrho^{-2/3}, \qquad \tau_2 = \frac{1}{3}\,\tau_1 \quad \text{für die Membranwirkung,}$$

so daß für den Außenrand ($\varrho = 1$) die Sonderwerte

Zahlentafel 5. Die Spannungswerte γ_1, γ_2, τ_1, τ_2 für den Außen- und Innenrand (Gl. 38, 40—44).

Lochverhältniszahl $\varrho_i = 0{,}7$			Fall	Belastungskennzahl ϑ^* 100	200	300	350	500	750	1000
Außenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^a	I	0,434	1,133	1,811	2,133	3,042	4,407	5,643
			IIa	1,534	2,475	3,265	3,627	4,617	6,072	7,371
			IIb	1,533	2,475	3,264	3,624	4,617	6,072	7,371
			III	1,561	2,478	3,247	3,602	4,567	5,983	7,247
		tangential $\tau_2^a = \mu\,\tau_1^a$	I	0,145	0,378	0,604	0,711	1,014	1,469	1,881
			IIa	0,511	0,825	1,088	1,209	1,539	2,024	2,457
			IIb	0,511	0,825	1,088	1,208	1,539	2,024	2,457
			III	0,468	0,743	0,974	1,080	1,370	1,795	2,174
	Biegungseinfluß	radial γ_1^a	gleich Null für alle vier Fälle							
		tangential γ_2^a	I	0,594	0,960	1,213	1,317	1,572	1,893	2,141
			IIa	0,827	1,051	1,207	1,272	1,436	1,646	1,814
			IIb	0,826	1,049	1,205	1,269	1,433	1,643	1,810
			III	0	0	0	0	0	0	0
Innenrand	Membraneinfluß	radial τ_1^i	I	0,538	1,403	2,242	2,642	3,768	5,457	6,985
			IIa	1,945	3,139	4,141	4,598	5,856	7,702	9,349
			IIb	1,945	3,139	4,141	4,599	5,857	7,702	9,349
			III	1,998	3,171	4,155	4,606	5,842	7,656	9,273
		tangential $\tau_2^i = \mu\,\tau_1^i$	I	0,179	0,468	0,747	0,880	1,256	1,819	2,328
			IIa	0,648	1,046	1,380	1,533	1,952	2,567	3,116
			IIb	0,648	1,046	1,380	1,533	1,952	2,567	3,116
			III	0,599	0,951	1,246	1,382	1,753	2,297	2,782
	Biegungseinfluß	radial γ_1^i	I	5,379	8,688	10,983	11,921	14,236	17,134	19,383
			gleich Null für die Fälle IIa, IIb und III							
		$\gamma_2^i = \mu\,\gamma_1^i$ tangential γ_2^i	I	1,793	2,896	3,661	3,973	4,745	5,711	6,461
			IIa	1,325	1,684	1,934	2,038	2,300	2,637	2,905
			IIb	1,328	1,687	1,938	2,042	2,305	2,643	2,912
			III	0	0	0	0	0	0	0

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1^a &= 0, \qquad \gamma_2^a = \frac{B_1}{6\sqrt{3}}, \\ \tau_1^a &= \frac{B_1^2}{48}, \qquad \tau_2^a = \frac{1}{3}\,\tau_1^a, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

für den Innenrand ($\varrho = \varrho_i$) die Sonderwerte

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1^i &= 0, \qquad \gamma_2^i = \frac{B_1}{6\,\alpha^2\sqrt{3}}, \\ \tau_1^i &= \frac{B_1^2}{48\,\alpha}, \qquad \tau_2^i = \frac{1}{3}\,\tau_1^i \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

gelten.

In den Zahlentafeln 2 bis 5 sind die mit $\mu = 1/3$ gerechneten Sonderwerte von γ_1, γ_2, τ_1, τ_2 für den Außen- und Innenrand der Ringplatte in ihrer Abhängigkeit von ϑ^* und ϱ_i entsprechend den Lagerungsfällen I und II übersichtlich zusammengestellt,

womit der gesuchte Einfluß der Biegung und der Membranwirkung auf die Spannungen einer Ringplatte mit großer Ausbiegung zahlenmäßig festgestellt ist.

Die in den Zahlentafeln bei Fall II berücksichtigte Unterteilung in IIa und IIb bezieht sich auf die für die Berechnung verwendeten Verfahren a und b. Der Vergleich der einander entsprechenden Werte dieser beiden Fälle zeigt, daß mit den einfachen, nach dem Verfahren b gewonnenen Formeln die Spannungen im Bereiche $\varrho_i \lessgtr 0{,}3$ sehr gut angenähert werden; für $\varrho_i < 0{,}3$ müssen hingegen die umständlicheren Formeln für den Fall IIa benutzt werden.

Nach der Membrantheorie von Schwerin ergeben sich radiale und tangentiale Membranspannungen σ_r und σ_t, für die mit den hier verwendeten Bezeichnungen die Formeln

$$\sigma_r = E\frac{h^2}{r_a^2}\bar{\sigma}_r\sqrt[3]{\frac{\vartheta^*}{13824\,(1-\mu^2)^2}}, \qquad \sigma_t = E\frac{h^2}{r_a^2}\bar{\sigma}_t\sqrt[3]{\frac{\vartheta^*}{13824\,(1-\mu^2)^2}}$$

gelten, so daß demnach

$$\tau_1 = \bar{\sigma}_r\sqrt[3]{\ldots}, \tag{43}$$

$$\tau_2 = \bar{\sigma}_t\sqrt[3]{\ldots} \tag{44}$$

und $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ zu setzen ist.

Die für die Annahme $\mu = 0{,}3$ gültigen Beiwerte $\bar{\sigma}_r$ und $\bar{\sigma}_t$ können aus der Arbeit Schwerins unmittelbar entnommen und hiermit die ihnen nach den vorstehenden Gleichungen entsprechenden Membranwerte τ_1, τ_2 berechnet werden; sie sind in den Zahlentafeln 2 bis 5 unter Fall III zu Vergleichszwecken mit aufgenommen.

Die Angaben dieser Zahlentafeln lassen klar erkennen, daß der Einfluß der Biegung auf die Spannungen einer dünnen, nur am Innenrande belasteten Ringplatte ein so beträchtlicher ist, daß die übliche Berechnung einer solchen dünnen Ringplatte mit großer Ausbiegung als reine Ringmembran nicht nur bezüglich der Formänderung, sondern auch hinsichtlich der Beanspruchung ein ganz unrichtiges Bild gibt; nur im Bereiche großer Lochverhältniszahlen ($\varrho_i \lessgtr 0{,}7$) ist wenigstens die Formänderung durch die Ringmembrantheorie zutreffend dargestellt.

Literatur:

[1] Enzyklopädie der math. Wiss., Bd. IV, 4, S. 350. 1907—1914. — [2] St. Way: Trans. Amer. Soc. mech. Engr. **56**, 627 (1934). — [3] K. Federhofer: Luftf.-Forschg. **21**, 1 (1944). — [4] A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 5, S. 24, 132. Leipzig: Teubner 1907. — [5] H. Hencky: Z. Math. Phys. **63**, 311 (1915). — [6] H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. **1**, 81, 423 (1921). — [7] E. Schwerin: Z. techn. Physik **10**, 651 (1929).

(Eingegangen am 18. Februar 1946.)

Über den plastischen Körper von Prandtl. Zur Theorie der Mohrschen Grenzkurve.

Von C. Torre, Wien.

Mit 12 Textabbildungen.

Zuerst wird die mathematische Theorie der Mohrschen Hüllkurve entwickelt. Aus den versuchsmäßig gewonnenen Hüllkurven werden die Eigenschaften der Fließbedingungen abgeleitet und mit einigen bekannten Fließhypothesen verglichen. Da die Mohrsche Theorie mit Hüllparabel von Leon die meisten Forderungen erfüllt, wird nach dieser Fließbedingung das Rohr auf Innendruck und die Festigkeit von Schneiden untersucht. Dabei wird gezeigt, daß die Mohrsche Theorie mit Hüllparabel die konvergierenden, während die Mohrsche Theorie mit Hüllgeraden die divergierenden Ergebnisse mit wachsendem Verhältnis der Druckfestigkeit zur Zugfestigkeit liefert.

I. Einleitung.

Nach B. de St. Venant und M. Lévy soll die größte Schubspannung bei der Überschreitung der Elastizitätsgrenze einen konstanten Wert haben. Der unter dieser Bedingung behandelte plastische Körper wird von Prandtl[1] der „spezielle plastische Körper" genannt. Diese Fließbedingung ist in der Theorie von Mohr[2] als Sonderfall enthalten. Für die Fließbedingung hat Mohr[2] näherungsweise eine geradlinige Beziehung zwischen der größten Hauptnormalspannung σ_1 und der kleinsten Hauptnormalspannung σ_3 aufgestellt. Diese Näherung hat zuerst Prandtl[1] für die Berechnung des plastisch verformten Körpers verwendet. Diese allgemeinere Fassung des Begriffes des plastischen Körpers ist in der Literatur[3] unter der Bezeichnung des „plastischen Körpers von Prandtl" bekannt. Prandtl[1] hat auch erwähnt, daß die Fließbedingung bei der Berechnung des plastischen Körpers nicht nur eine lineare Beziehung zwischen σ_1 und σ_3, sondern auch von allgemeinerer Art sein kann. Für das Problem der Härte plastischer Körper gibt Prandtl[1] die Anleitung, wie man den plastischen Körper nach der Mohrschen Theorie mit einer gekrümmten Hüllkurve behandeln kann.

In einer anderen Arbeit* wurde die Hohlkugel unter hydrostatischem Außendruck im bildsamen Zustand untersucht, wobei nur die bezogene Außenbelastung p berechnet wurde, bei der die ganze Hohlkugel in den plastischen Zustand übergeht. Nach der Hauptschubspannungstheorie, d. h. für $c = \sigma_q/\sigma_s = 1$, hat diese Untersuchung schon Reuß[4] durchgeführt; hier bezeichnen wir nach Leon[5] mit c das Verhältnis zwischen der Quetschgrenze σ_q (Fließspannung bei Druckversuch) und der Streckgrenze σ_s (Fließspannung bei Zugversuch). In genannter Arbeit* wurde noch diese Belastung p der Hohlkugel aus der Hüllgeraden ($c > 1$) berechnet. Der Spannungskreis, der dem Spannungszustand an der Außenfläche der Hohlkugel entspricht, liegt weit draußen im Druckbereich des Mohrschen Koordinatensystems (σ, τ), während Mohr[2] die Gültigkeit seiner Hüllgeraden nur in verhältnismäßig engen Grenzen zwischen den Spannungskreisen für σ_q und σ_s vorgesehen hat. Außerhalb dieser Grenzen bekommt man bei spröden Werkstoffen ($c > 1$) rechnungsmäßige Spannungen im plastischen Körper, die sich beträchtlich vom wirklichen Zustand unterscheiden. Um diese Unstimmigkeiten zu vermeiden, hat sich der Verfasser* nicht streng an den Vorschlag von Mohr[2] gehalten, sondern angenommen, daß die Hüllgerade nur den Spannungskreis σ_s tangieren soll, während der Spannungskreis σ_q durch die Hüllgerade geschnitten wird. Die Neigung der Hüllgeraden soll damit nach der Größe

* Diese andere Arbeit enthält eine theoretische Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Preßdruck und Porosität von Pulvern; sie wird in Kürze erscheinen.

des c-Verhältnisses abgeschätzt werden. Zusammenfassend kann man sagen, daß die Ergebnisse der Berechnung des plastischen Körpers nach der Hüllgeraden von Mohr[2] bei wachsender Sprödigkeit des Werkstoffes divergieren, wie z. B. die Belastung p der Hohlkugel, unter der sie ganz plastisch wird, oder der Ausdruck für die „plastische Härte" σ_h von Prandtl.[1]

Im folgenden soll daher die Berechnung des plastischen Körpers nach einer Fließbedingung durchgeführt werden, die der Mohrschen Theorie mit gekrümmter Hüllkurve am besten entspricht. Es wird die mathematische Theorie der Mohrschen Hüllkurve bei gegebener Fließbedingung aufgestellt und auch die Gleichungen für die Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3 an der Fließgrenze bei gegebener Mohrscher Hüllkurve abgeleitet. Die Besprechung dieser Gleichung ergibt an Hand der bekannten physikalischen Ergebnisse der Hüllkurve die gesuchten Eigenschaften für die Fließbedingung. Ferner werden die Versuchsergebnisse von Kármán[6] mit Marmor untersucht. Sowohl die theoretischen als auch die Versuchsergebnisse werden im Koordinatensystem der Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3 nach Haigh[7] und Hencky[8] dargestellt. Eine in der mathematischen Form angegebene Fließbedingung, die auch die mittlere Hauptnormalspannung σ_2 enthält, läßt sich im Koordinatensystem (σ, τ) von Mohr[2] darstellen, wenn σ_2 als Funktion von σ_1 oder σ_3 bekannt ist. So kann die Bedingung für die Proportionalitätsgrenze für Marmor von Schleicher[9] im Koordinatensystem (σ, τ) dargestellt werden, da dort $\sigma_2 = \sigma_1$ ist. Von bekannten Fließtheorien wird die Hauptschubspannungstheorie, die Mohrsche Theorie mit Hüllgerade, die Gestaltänderungstheorie (so wird im „Stahlbaukalender" 1943, S. 43, die Theorie der unveränderlichen Gestaltänderungsarbeit genannt) und die Mohrsche Theorie mit Hüllparabel von Leon[5] besprochen. Die Berechnung der Mohrschen Hüllkurve nach der Gestaltänderungstheorie hat schon Bijlaard[10] durchgeführt. Er hat mit dem ebenen Spannungszustand $(\sigma_2 = 0)$ gerechnet, wobei nach der Gestaltänderungstheorie σ_2 nicht immer die mittlere Spannung bedeutet $(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$. Der ebene Verzerrungszustand $(\varepsilon_2 = 0)$ ergibt in diesem Falle nicht bessere Ergebnisse, wie sich noch zeigen wird. Da die Berechnung des plastischen Körpers nach der Gestaltänderungstheorie eine Unstetigkeit des Spannungsverlaufes ergibt und da diese Theorie keine Möglichkeit zur Berücksichtigung verschiedener c-Werte gibt, ist sie für die Berechnung des plastischen Körpers nicht besonders geeignet.

Bei der Berechnung einer umlaufenden Scheibe hat Hencky[8] die Gestaltänderungstheorie durch eine lineare Beziehung ersetzt, was an und für sich der Mohrschen Theorie mit Hüllgeraden entspricht. Hencky[8] hat seine Untersuchungen auf den Wert $c = \sigma_q/\sigma_s = 1/(2 - \sqrt{3}) = \text{rd. } 3{,}73$ begrenzt, aber seine Gleichungen gelten auch allgemein. Aus $\cos 2\alpha = (1 - \varkappa)/(1 + \varkappa) = 1/\sqrt{3}$ läßt sich der Gleitwinkel $2\alpha = 54° 44'$ berechnen, wobei $\varkappa = 2 - \sqrt{3}$. Die Drillspannung beträgt: $\tau_D = \frac{\sigma_s}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$; damit ist τ_D um $\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1{,}3661$ oder um rd. 37% größer als nach der Gestaltänderungstheorie $(\tau_D = \sigma_s/\sqrt{3})$. Die Spannungskreise, die sich aus den Spannungszuständen der umlaufenden Scheibe in der Mohrschen Darstellung zeichnen lassen, sind nach der Näherung von Hencky[8] in guter Übereinstimmung mit denjenigen der Gestaltänderungstheorie. Für einen Werkstoff wie beim (weichen) Stahl, wo angenähert $c = 1$ ist, bleibt zu erwägen, ob diese Näherung Vorteile im Vergleich mit der Hauptschubspannungstheorie besitzt.

Es zeigt sich, daß die Mohrsche Theorie mit Hüllparabel von Leon[5] eine Fließbedingung ergibt, die weitgehend alle theoretischen Erfordernisse erfüllt. Mit dieser Fließbedingung von Leon[5] wird das Rohr auf Innendruck und das Problem der Härte plastischer Körper von Prandtl[1] behandelt.

Das Rohr wird untersucht, weil es für die technische Praxis wichtiger ist als die Hohlkugel,* während die Lösungsverfahren und die Ergebnisse sehr ähnlich sind. Das plastisch verformte Rohr hat schon B. de St. Venant behandelt. Domke[11] hat als erster das elastisch-plastisch verformte Rohr untersucht. Kármán[12] machte darauf aufmerksam, daß die Tangentialspannungen an der Übergangsstelle vom elastischen zum plastischen Bereich unstetig sind. Nádai[13] hat das Rohr nach der Gestaltänderungstheorie unter Zugrundelegung eines ebenen Verzerrungszustandes berechnet; an anderer Stelle gibt Nádai[14] auch die Lösung nach der Hauptschubspannungstheorie. Eine Berechnung des Rohres auf Innen- bzw. Außendruck nach der Hüllgeraden von Mohr[2] ist im Handbuch der Physik[3] enthalten, wobei die Ergebnisse einer unveröffentlichten Arbeit von W. Hartmann für die erdartigen Massen mitgeteilt werden. Falls man in den Gleichungen für die Radial- und Tangentialspannungen der umlaufenden Scheibe von Hencky[8] die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$ annimmt, bekommt man die Gleichungen, die nach leichtem Anpassen für das Rohr oder für die Hohlkugel auf Innen- oder Außendruck gelten.

Als zweites Beispiel wird das Problem der plastischen Härte von Prandtl[1] nach der Fließbedingung von Leon[5] untersucht. Dabei werden die gleichen Voraussetzungen gemacht wie bei Prandtl,[1] die hier als bekannt vorausgesetzt werden. Der Sonderfall $c = \infty$ läßt sich in der Erddrucktheorie nicht verwenden, da eine beträchtliche Druckfestigkeit σ_q übrigbleibt und da die Hüllparabel zur Behandlung verschiedener Reibungswinkel nicht geeignet ist.

Es wird vorausgesetzt, daß die mittlere Hauptnormalspannung σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) nach Mohr[2] keinen Einfluß auf den Fließzustand ausüben soll. Die plastischen Verschiebungen sollen unendlich klein sein; das Material sei homogen und isotrop.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. Tonio Rella für seine wertvollen Anregungen zum mathematischen Teil dieser Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.**

II. Die Theorie der Mohrschen Hüllkurve.

Es wird angenommen, daß die Fließbedingung in der Form

$$\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3) \tag{1}$$

angegeben ist. In Abb. 1 ist Gl. (1) im Koordinatensystem (σ_1, σ_3) dargestellt. Da $\sigma_1 > \sigma_3$ sein soll, ist der schraffierte Teil in Abb. 1 ungültig, da dort $\sigma_1 \leqq \sigma_3$ gilt.[18] In der Mohrschen Darstellung

$$\tau = \tau(\sigma) \tag{2}$$

ergibt sich für den durch Gl. (1) ausgedrückten Zusammenhang die Hüllkurve in Abb. 2. Bekanntlich ist Gl. (2) die Hüllkurve aller Spannungskreise, die den Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3 entsprechen. Zur Berechnung der Koordinaten σ und τ des beliebigen Punktes C in Abb. 2 bei gegebenen Koordinaten σ_1 und σ_3 des entsprechenden Punktes C in Abb. 1 muß man in der Gleichung eines Kreises aus Abb. 2

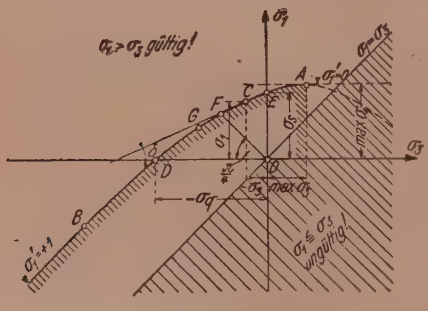

Abb. 1.

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1 \sigma_3 + \tau^2 = 0, \tag{3}$$

auf welchem der Punkt C liegt, die Spannung σ_3 als Parameter betrachten. Um die Hüllkurve aller Kreise zu ermitteln, differenzieren wir Gl. (3) nach σ_3. Es ergibt sich dann die Normalspannung in der Gleitebene

** Herr Professor Dr. Tonio Rella ist als Opfer des Artilleriebeschusses am 8. April 1945 in Wien gestorben. Er wird in unserem Gedächtnis als hervorragender Lehrer und Forscher weiterleben.

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3\,\sigma_1'}{1 + \sigma_1'}, \tag{4a}$$

wobei nach Gl. (1) $\sigma_1' = d\sigma_1/d\sigma_3$ bedeutet. Aus Gl. (4a) und (3) folgt die Schubspannung in der Gleitebene

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma_1'} \cdot \sqrt{\sigma_1'}. \tag{4b}$$

Gl. (4a) und (4b) ergeben die Mohrsche Hüllkurve in Parameterdarstellung. Da die Schubspannung τ eine reelle Größe ist, so muß in Gl. (4b) $\sigma_1' \geqq 0$ sein. Damit wird die Funktion Gl. (1) sehr eingeschränkt.

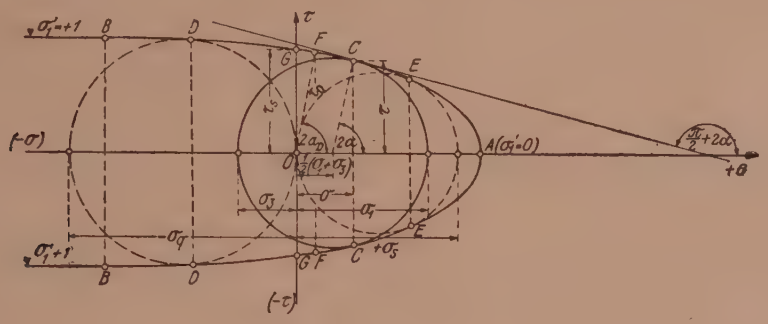

Abb. 2.

Es wird weiter der Gleitwinkel α berechnet. Mit den Beziehungen $\dot{\sigma} = d\sigma/d\sigma_3$ und $\dot{\tau} = d\tau/d\sigma_3$ folgt aus Gl. (4a) und (4b) (für $\tau > 0$)

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{(1 + \sigma_1')^2}\{2\,(1 + \sigma_1')\,\sigma_1' - (\sigma_1 - \sigma_3)\,\sigma_1''\}. \tag{5a}$$

$$\dot{\tau} = -\frac{1 - \sigma_1'}{2\,(1 + \sigma_1')^2\sqrt{\sigma_1'}}\{2\,(1 + \sigma_1')\,\sigma_1' - (\sigma_1 - \sigma_3)\,\sigma_1''\}. \tag{5b}$$

Da $\tau' = d\tau/d\sigma = \dot{\tau}/\dot{\sigma}$ ist, folgt aus Gl. (5a) und (5b)

$$\tau' = -\frac{1 - \sigma_1'}{2 \cdot \sqrt{\sigma_1'}}. \tag{6}$$

Aus Gl. (6) sieht man, daß τ' nur von σ_1' und nicht etwa von σ_1'' abhängig ist, d. h. daß die Linienelemente σ_1, σ_3 und σ_1' der Fließbedingung in die Linienelemente σ, τ und τ' der Hüllkurve übergehen. Es liegt eine Berührungstransformation vor. Aus der Tangente im Punkt C (Abb. 2) ergibt sich die Beziehung zwischen τ' und dem Gleitwinkel

$$\tau' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\,\alpha\right) = \frac{-1}{\operatorname{tg} 2\,\alpha}. \tag{7a}$$

Aus Gl. (6) und (7a) bekommt man die gesuchte Funktion für die Berechnung des Gleitwinkels

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{\sigma_1'}}{1 - \sigma_1'} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\sigma_1'}. \tag{7}$$

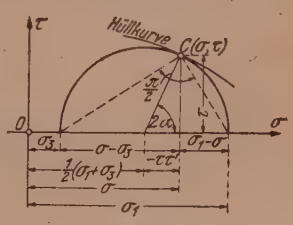

Abb. 3.

Da aus Abb. 1 $\sigma_1' = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}^2\alpha$ folgt, so stellt Gl. (7) die Verbindung zwischen den beiden Winkeln α und δ dar. Der Krümmungshalbmesser der Hüllkurve ist

$$R = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{1 + \sigma_1'}{\sigma_1''} \cdot \sigma_1'. \tag{8}$$

Die umgekehrte Aufgabe ergibt sich, wenn man aus der gegebenen Hüllkurve die Fließbedingung sucht. Für einen gegebenen Punkt C in Abb. 3 hat die Subnormale der Hüllkurve die Größe $(-\tau\,\tau')$. Es ist leicht zu sehen, daß $\tau^2 = (\sigma - \sigma_3)\,(\sigma_1 - \sigma)$

und $\sigma = {}^1/_2\,(\sigma_1 + \sigma_3) - \tau\,\tau'$ ist. Daraus folgt die Fließbedingung in Parameterform

$$\sigma_3 = \sigma + \tau\tau' - \sqrt{\tau^2 + (\tau\tau')^2}. \tag{9a}$$

$$\sigma_1 = \sigma + \tau\tau' + \sqrt{\tau^2 + (\tau\tau')^2}. \tag{9b}$$

Es sollen nun unsere Gleichungen an Hand der bekannten Versuchsergebnisse der Hüllkurve besprochen werden. In Abb. 1 und 2 interessieren uns die Punkte A und B, in Abb. 2 noch die Drillspannung $\tau_D = \overline{OF}$ und die Scherspannung $\tau_S = \overline{OG}$, die an der Fließgrenze liegen.

Im Punkt A (Abb. 2), d. h. im Scheitel der Hüllkurve, wird nach Leon[5,15] ein stetiger Verlauf mit der stetigen ersten Ableitung gefordert. Da dort die Schubspannung $\tau = 0$ ist, so folgt aus Gl. (4b) entweder $\sigma_1' = 0$ oder $\sigma_1 = \sigma_3$. Die erste Bedingung: $\sigma_1' = 0$ liefert aus Gl. (4a) $\sigma = \sigma_1$, d. h. daß die Normalspannung der Gleitebene mit der Hauptnormalspannung zusammenfällt. Die Fließbedingung Gl. (1) in der Darstellungsform von Abb. 1 erreicht dabei ein Maximum. Mit diesen Werten ergibt sich der kleinste Krümmungshalbmesser der Hüllkurve aus Gl. (8)

$$|\min R| = \frac{\max \sigma_1 - \max \sigma_3}{2}. \tag{10}$$

In Abb. 2 ist angenommen, daß vom Punkt B an die Hauptschubspannungstheorie gilt, d. h. daß die Hüllinie parallel zur σ-Achse verläuft. Für diesen Bereich beträgt der Gleitwinkel $\alpha = \pi/4$ (Abb. 2) und dementsprechend $\delta = \pi/4$ (Abb. 1). Damit ergibt sich aus Gl. (7) $\sigma_1' = +1$. Bei spröden Werkstoffen konnte dieser Punkt B nicht erreicht werden. Nach Ansicht Kármáns[6] liegt dieser Punkt im Unendlichen bei endlich großer kritischer Hauptschubspannung. Nach der Hüllparabel von Leon[5] ergibt sich hingegen eine unendlich große kritische Schubspannung.

Aus den versuchsmäßig ermittelten Hüllinien folgt, daß nur derjenige Teil der Fließbedingung $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3)$ gilt, dessen Tangenten zwischen den Ableitungen $\sigma_1' = +1$ und $\sigma_1' = 0$ verlaufen, wobei $\sigma_1 > \sigma_3$ aufrechterhalten bleiben muß.

Die Strecke $\overline{OF}$ in Abb. 2 ergibt die Drillspannung an der Fließgrenze $\tau_D = \sigma_1 = -\sigma_3$; der entsprechende Punkt F in Abb. 1 ist graphisch leicht zu ermitteln. Mit dem Wert $\sigma_1 = -\sigma_3$ folgt aus Gl. (7) $\sin 2\alpha = 2\sqrt{\sigma_1'}/(1+\sigma_1')$ und $\cos 2\alpha = (1-\sigma_1')/(1+\sigma_1')$; damit ergeben sich aus Gl. (4a) und (4b) die Spannungen in der Gleitebene zu $\sigma = \sigma_1 \cos 2\alpha_D$ und $\tau = \pm\,\sigma_1 \sin 2\alpha_D$; mit α_D ist der Gleitwinkel nach dem Drillversuch bezeichnet (Abb. 2).

Die Strecke $\overline{OG}$ in Abb. 2 ergibt die Scherspannung τ_S an der Fließgrenze. Diese Spannung erhält man durch die Nullsetzung der Normalspannung σ in der Gleitebene. Dann ergibt sich aus Gl. (4a) $\sigma_1' = -\sigma_1/\sigma_3$; der entsprechende Punkt G ist in Abb. 1 eingetragen. Aus Gl. (4b) bekommt man $\tau_S = \pm\sqrt{-\sigma_1\sigma_3}$. Eine graphische Konstruktion der Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3, die in der Gleitebene die Scherspannung τ_S erzeugen, ergibt sich aus Abb. 2, wenn man die Richtung der Tangente im Punkt G kennt. Die Normale im Punkt G ergibt im Schnittpunkt mit der σ-Achse die Lage des Kreismittelpunktes und den Halbmesser des Spannungskreises und damit auch die Spannungen σ_1 und σ_3. Rechnerisch erhält man σ_1 und σ_3 aus Gl. (9a) und (9b) mit $\sigma = 0$, $\tau = \tau_S$ sowie $(\tau')_{\tau=\tau_S}$; diese Größen sind von Leon[15] für die Hüllparabel abgeleitet (s. auch H. Bay[16]). Normalerweise wird die Scherfestigkeit versuchsmäßig durch einfaches Abscheren erhalten (s. z. B. [15]).

Bei der Hauptschubspannungstheorie sind Drill- und Scherspannung an der Fließgrenze gleich groß; dementsprechend kommt man auch zu gleichem Gleitwinkel und zu gleicher Gleitfläche.

Die Spannungskreise für die Streckgrenze σ_s und die Quetschgrenze σ_q sind in Abb. 2 strichliert gezeichnet, wobei mit α_q der Gleitwinkel beim einachsigen Druckversuch bezeichnet ist. Die hier vorkommenden Grenzspannungen entsprechen den Punkten E und D in Abb. 1 und 2.

III. Die Transformation einiger Grenzbedingungen.

Die Berührungstransformationen verschiedener Grenzbedingungen werden wir mit Anwendung der Gl. (4a), (4b), (7), (8), (9a) und (9b) durchführen.

a) Für die Anwendung der Gleichungen auf Versuchsergebnisse seien die Versuche von Kármán[6] mit Marmor herangezogen, und zwar diejenigen, die denselben bleibenden Dehnungen von $\varepsilon = 0{,}25\%$ entsprechen. Die verschiedenen Beanspruchungen der Marmorproben sind in Abb. 4 und in Zahlentafel 1 angegeben. Dabei sind die zahlenmäßigen Angaben für die Spannungen σ_1 und σ_3 aus dem Kármánschen Schaubild abgelesen, da sich in der Originalarbeit keine diesbezügliche Zahlentafel vorfindet.

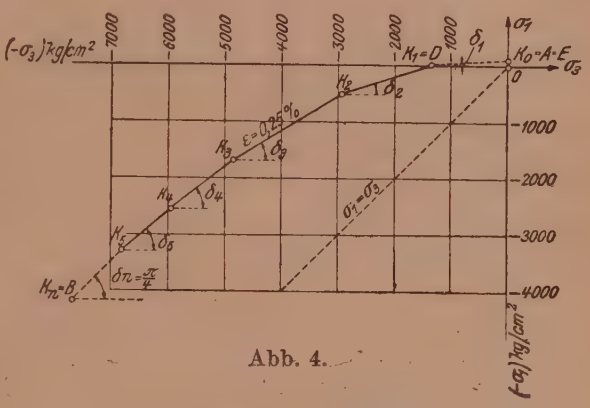

Abb. 4.

In die Spalte $\sigma_1' = \operatorname{tg}\delta$ der nachstehenden Tafel wurde das arithmetische Mittel der beiden Neigungen angegeben, die in einem Meßpunkt in Abb. 4 zusammentreffen. Die Punkte K_0 und K_n sind nur als Hilfspunkte für die Berechnung der Neigungen in K_1 und K_5 gewählt. Der Punkt K_0 ist so angenommen, daß $c = 26$ wird; dieser Wert ist in Hütte I[14] (S. 697, Tafel 19) als Durchschnittswert für Steine angegeben. Der Punkt K_n ist so gewählt, daß die Neigung $\delta_n = \pi/4$ wird. Aus den Linienelementen σ_1, σ_3 und σ_1' sind die Spannungen σ und τ in der Gleitebene aus Gl. (4a) und (4b) und der Gleitwinkel α aus Gl. (7) gerechnet. Mit den Angaben aus der Zahlentafel 1 läßt sich leicht die Hüllkurve im Koordinatensystem (σ, τ) aufzeichnen. Die Punkte A, E, D und B aus Abb. 1 und 2 sind in Abb. 4 eingetragen.

Zahlentafel 1.

K	Nach Kármán		$\sigma_1' = \operatorname{tg}\delta$	Gl. (4a), Gl. (4b)		Gl. (7)	α
	σ_3	σ_1		σ	τ	$\operatorname{tg}\alpha$	
	kg/cm²			kg/cm²			
K_0	0	+ 52	—	—	—	—	—
K_1	— 1370	0	0,1834	— 212	± 496	0,4283	23° 11′
K_2	— 2940	— 516	0,4686	— 1289	± 1130	0,6845	34° 24′
K_3	— 4850	— 1678	0,6890	— 2972	± 1559	0,8301	39° 42′
K_4	— 5970	— 2540	0,8209	— 4086	± 1707	0,9061	42° 11′
K_5	— 6830	— 3290	0,9361	— 5002	± 1769	0,9675	44° 03′

b) Hypothese der Energiegrenze der Elastizität von Schleicher. Schleicher[9] hat die Gleichung für die Proportionalitätsgrenze aus Versuchen von Kármán[6] mit Marmor aufgestellt. Sie wird in etwas genauerer Form geschrieben, da die verschiedenen Berechnungen mit ihr noch durchgeführt werden:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 0{,}93063\,(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + 898{,}72537\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \\ - 1172250{,}48648 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Gl. (a) stellt im Koordinatensystem $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein Rotationsellipsoid dar. Bei den Versuchen von Kármán[6] war

$$\sigma_2 = \sigma_1. \tag{b}$$

Gl. (b) stellt im Koordinatensystem $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Ebene dar, deren Schnitt mit dem Rotationsellipsoid Gl. (a) eine Ellipse ergibt, die in Abb. 5 gezeichnet ist. Daneben sind die Versuche von Kármán[6] (s. Zahlentafel 4 von Schleicher[9]) aufgetragen. Die strichlierte Linie gleicht annähernd die Versuchspunkte von Kármán[6] aus. Die Hypothese von Schleicher[9] nähert sich gut diesen Ergebnissen. Die Spannungen in den Punkten S_2 bis S_7 in Abb. 5 sind unmittelbar aus Gl. (a) und (b) gerechnet.

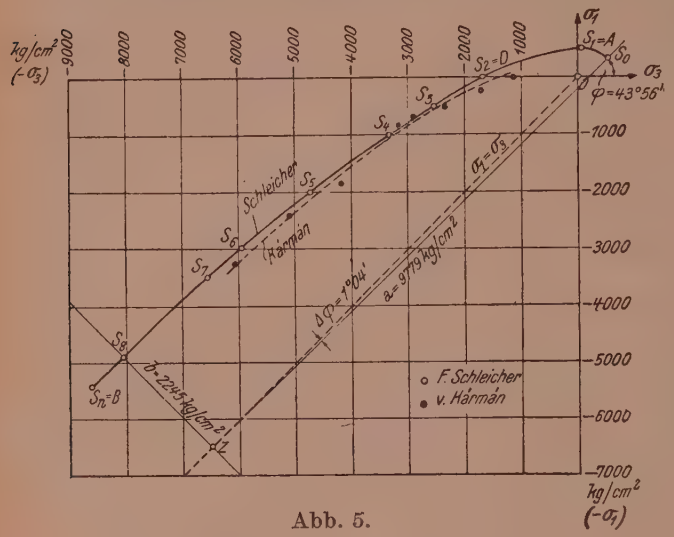

Abb. 5.

In Zahlentafel 2 sind für diese Werte die Spannungen σ und τ in der Gleitebene und der Gleitwinkel α angegeben.

Die Punkte S_1 und S_n sind aus der Bedingung $\sigma_1' = 0$ und $\sigma_1' = +1$ nach Gl. (a) und (b) gerechnet. Nach Schleicher[9] gilt Gl. (a) in den Grenzen $-5000 < p < -1000$, wobei mit $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (2\,\sigma_1 + \sigma_3)/3$ die mittlere Hauptnormalspannung bezeichnet ist. Aus Abb. 5 und durch das Zeichnen einer Hüllkurve ergibt sich, daß Gl. (a) auch in den Grenzen $-6500 < p < -550$ als gültig betrachtet werden kann.

Die Koordinaten des Mittelpunktes Z der Ellipse in Abb. 5 betragen $\sigma_1 = \sigma_3 = -6478$ kg/cm². Die große Achse der Ellipse weicht von der Geraden um $\Delta\varphi = 01° 04'$ ab. Damit schließt die große Achse der Ellipse mit der Richtung σ_3 den

Zahlentafel 2.

S	Gl. (a) und Gl. (b)			Gl. (7)		Gl. (4a), Gl. (4b)	
	σ_1	σ_3	p	σ_1'	tg α	α	σ	τ
	kg/cm²						kg/cm²	
S_1	+ 502	+ 18	+ 341	0	0	0	+ 502	± 0
S_2	0	— 1622	— 541	0,4869	0,6978	34° 54′	— 531	± 761
S_3	— 500	— 2540	— 1180	0,5958	0,7719	37° 40′	— 1262	± 987
S_4	— 1000	— 3331	— 1777	0,6660	0,8161	39° 13′	— 1932	± 1142
S_5	— 2000	— 4725	— 2908	0,7647	0,8745	41° 10′	— 3181	± 1350
S_6	— 3000	— 5970	— 3990	0,8405	0,9168	42° 31′	— 4356	± 1479
S_7	— 3500	— 6553	— 4518	0,8747	0,9353	43° 05′	— 4924	± 1523
S_n	— 5416	— 8601	— 6478	1	1	45° 00′	— 7009	± 1593

Winkel $\varphi = 43° 56'$ ein. Die große Achse beträgt $a = 9779$ kg/cm² und die kleine $b = 2245$ kg/cm². Mit diesen Werten werden die Punkte S_0 und S_8 in Abb. 5 erhalten. Würde man mit den Angaben aus Zahlentafel 2 die Hüllkurven nach Schleicher[9] und Kármán[6] zeichnen, so ergäben sich nur kleine Unterschiede.

c) Die Fließbedingung nach der Hauptschubspannungstheorie lautet

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s. \tag{11}$$

Aus Gl. (11) ergibt sich $\sigma_1' = +1$; damit lauten Gl. (4a) und (4b)

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \quad \tau = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \max \tau. \tag{12}$$

Aus Gl. (7) folgt mit $\sigma_1' = +1$ der Gleitwinkel $2\alpha = \pi/2$. Die Kurve in Abb. 1 geht in eine Gerade über, die gegen die σ_3-Achse unter dem Winkel $\delta = \pi/4$ geneigt ist, während die Hüllkurve in Abb. 2 durch zwei zur σ-Achse parallele Gerade dargestellt wird. In den Gleitflächen herrscht die größte Schubspannung $\max \tau$ unabhängig von der Normalspannung σ.

d) Für die Mohrsche Theorie mit Hüllgeraden ergibt sich die Fließbedingung

$$\sigma_1 - \varkappa \cdot \sigma_3 = \sigma_s, \tag{13}$$

wobei mit $\varkappa = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ bezeichnet ist. Hier beträgt $\sigma_1' = \varkappa$. Mit diesem Wert bekommt man aus Gl. (4a) und (4b) die Spannungen σ und τ in der Gleitebene. Ein Nachteil dieser Theorie ist, wie schon Leon[5,15] gezeigt hat, daß die Hüllgerade die σ-Achse nicht rechtwinkelig schneidet. Diese Theorie gibt auch nur eine begrenzte Möglichkeit für die Berechnung des plastischen Körpers, da ihre Gültigkeit sich nach Mohr[2] auf das Gebiet innerhalb der Spannungskreise σ_q und σ_s erstreckt. Die Kurve in Abb. 1 geht dann in eine Gerade mit $\operatorname{tg} \delta = \sigma_s/\sigma_q$ über.

e) Nach der Gestaltänderungstheorie für den ebenen Spannungszustand ($\sigma_2 = 0$) lautet die Fließbedingung

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_s^2. \tag{14}$$

Die Untersuchung der Gl. (14) nach Gl. (4a) und (4b) ist deshalb nicht statthaft, weil nicht immer, wie vorausgesetzt, $\sigma_2 = 0$ die mittlere Hauptnormalspannung bedeutet. Abgesehen davon ergibt sich aus Gl. (14), (4a) und (4b) für die Hüllkurve eine Ellipse mit der Gleichung

$$3\,\sigma^2 + 12\,\tau^2 = 4\,\sigma_s^2. \tag{15}$$

Diese Gleichung hat schon Bijlaard[10] aufgestellt. Diese Hüllkurve hat noch den weiteren Nachteil, daß sie gegen die $(-\sigma)$-Achse geschlossen ist. Die Gültigkeit der Gl. (14) erstreckt sich über den Bereich von $\sigma_1' = 0$ bis $\sigma_1' = +1$. Diese Werte entsprechen in Abb. 6 den Punkten A und B. Vom Punkte B aus müssen wir uns die Linie entsprechend der Tangente mit der Neigung $\delta = \pi/4$ fortgesetzt denken. Die Gültigkeitsbereiche sind in Abb. 6 durch Schraffierung hervorgehoben. Die Berechnung des plastischen Körpers nach dieser Theorie ergibt im Punkt B eine Unstetigkeit in den Spannungsverteilungen, wie der Verfasser bei der Berechnung des Rohres auf Innendruck festgestellt hat. In Abb. 6 sind noch die Punkte D und E gemäß Abb. 1 und 2 für die Quetsch- bzw. Streckgrenze eingetragen.

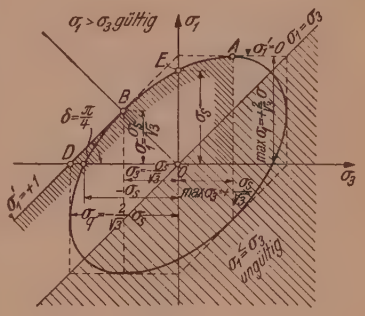

Abb. 6.

Für den ebenen Verzerrungszustand [$\varepsilon_2 = 0$, $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/m$] lautet die Fließbedingung nach der Gestaltänderungstheorie (s. Hencky[8])

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \frac{m^2 + 2m - 2}{m^2 - m + 1} \cdot \sigma_1 \sigma_3 = \frac{m^2}{m^2 - m + 1} \cdot \sigma_s^2, \tag{16}$$

wobei $1/m$ die Poissonsche Konstante bedeutet (reziprok zur Querzahl m). Von $m = \infty$ bis $m = 2$ ergibt Gl. (16), wie Hencky[8] gezeigt hat, Ellipsen gemäß Abb. 6 mit verschiedenen großen Achsen bei gleicher kleiner Achse. Mit $m = 2$ geht die Ellipse in zwei Gerade über. Jeder Ellipse entspricht eine andere Streckgrenze gemäß der Gleichung

$$\sigma_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2 - m + 1}} \cdot \sigma_s \neq \sigma_s, \tag{c}$$

die man aus Gl. (16) für $\sigma_3 = 0$ erhält. Aus Gl. (c) bekommt man nur für $m = \infty$ den Wert $\sigma_1 = \sigma_s$, was man von jeder Theorie für alle m-Werte verlangen müßte.

f) Die Mohrsche Theorie mit Hüllparabel von Leon. Leon[5] nimmt für die Hüllkurve eine quadratische Parabel

$$\tau^2 = 2p\,(\sigma_{sA} - \sigma) \tag{17}$$

an, wobei p den Parameter und σ_{sA} die Streckgrenze bei allseitig gleichem Zug bedeutet. Aus Gl. (17), (9a) und (9b) ergeben sich die Hauptnormalspannungen zu

$$\sigma_{1,3} = \sigma - p \pm \sqrt{2\,p\,(\sigma_{sA} - \sigma) + p^2}. \tag{d}$$

Aus Gl. (d) bekommt man

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 2\,(\sigma - p). \tag{e}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{2\,p\,(\sigma_{sA} - \sigma) + p^2}. \tag{f}$$

Aus Gl. (e) folgt $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + p$. Führt man diesen Ausdruck in Gl. (f) ein, so erhält man die Fließbedingungen von Leon[5] in der Form

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 4\,p\,(\sigma_1 + \sigma_3) = 4\,p\,(2\,\sigma_{sA} - p). \tag{18}$$

Für den Fall $\sigma_{sA} \geqq \sigma_s$ bekommt man aus Gl. (18) mit den Bedingungen $\sigma_1 = 0 \ldots \sigma_3 = -\sigma_q$ und $\sigma_3 = 0 \ldots \sigma_1 = +\sigma_s$ die Konstanten

$$2\,p = \frac{1}{2}\,(\sigma_q - \sigma_s), \qquad \sigma_{sA} = \frac{(\sigma_q + \sigma_s)^2}{8\,(\sigma_q - \sigma_s)}. \tag{19}$$

Die Gültigkeit der Gl. (19) ist leicht aus der Bedingung $\sigma_{sA} = \sigma_s$ zu ermitteln; aus der zweiten Gl. (19) ergibt sich diese Grenze zu $c = \sigma_q/\sigma_s = 3$. Für alle $c \geqq 3$ gilt $\sigma_{sA} = \sigma_s$. Die für diesen Fall noch unbekannte Konstante $2\,p$ ergibt sich aus Gl. (18) aus der Bedingung $\sigma_1 = 0 \ldots \sigma_3 = -\sigma_q$ mit

$$2\,p = \sigma_q + 2\,\sigma_s - 2\sqrt{\sigma_s\,(\sigma_q + \sigma_s)}. \tag{20}$$

Zusammenfassend gelten also folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + a\,(\sigma_1 + \sigma_3) = b^2, \\ &\text{hier ist für } c \leqq 3\text{:} \\ &\quad a = \sigma_q - \sigma_s = (c-1)\,\sigma_s, \qquad b^2 = \sigma_q\,\sigma_s = c \cdot \sigma_s^{2\,17} \\ &\text{und für } c \geqq 3\text{:} \\ &\quad a = 2\,[\sigma_q + 2\,\sigma_s - 2\sqrt{\sigma_s\,(\sigma_s + \sigma_q)}] = 2\,(c + 2 - 2\sqrt{c+1})\,\sigma_s, \\ &\quad b^2 = -\,[\sigma_q + 4\,\sigma_s - 4\sqrt{\sigma_s\,(\sigma_q + \sigma_s)}] \cdot \sigma_q = -\,(c + 4 - 4\sqrt{c+1}) \cdot c\,\sigma_s^2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

zu setzen. Gl. (21) gilt in den Grenzen $\sigma_1' = 0$ bis $\sigma_1' = +1$. Die erste Ableitung der Gl. (21) lautet

$$\sigma_1' = \frac{2\,(\sigma_1 - \sigma_3) - a}{2\,(\sigma_1 - \sigma_3) + a}. \tag{22}$$

Die Extremwerte der Fließbedingung Gl. (21) ergeben sich aus Gl. (22) mit $\sigma_1' = 0$ und Gl. (21) allgemein zu

$$\max \sigma_1 = \frac{b^2}{2\,a} + \frac{a}{8}, \qquad \sigma_k = \frac{b^2}{2\,a} - \frac{3}{8}\,a, \tag{23}$$

wobei nach Leon[5] $-\sigma_k = \max \sigma_3$. Aus Gl. (23) und (10) ergibt sich der Krümmungshalbmesser im Scheitel der Hüllparabel mit $|\min R| = a/4$ (vgl.[15]). Aus Gl. (23) ergeben sich die Koordinaten des Punktes A in Abb. 1 und 2. Aus Gl. (23) und (21) bekommt man

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } c \leqq 3\text{: } \max \sigma_1 = \sigma_{sA} = \frac{(\sigma_q + \sigma_s)^2}{8\,(\sigma_q - \sigma_s)}, \qquad \sigma_k = \frac{(3\,\sigma_q - \sigma_s)\,(3\,\sigma_s - \sigma_q)}{8\,(\sigma_q - \sigma_s)}; \\ &\text{für } c \geqq 3\text{: } \max \sigma_1 = \sigma_s, \qquad \sigma_k = -\,(\sigma_q + \sigma_s) + 2\sqrt{\sigma_s\,(\sigma_q + \sigma_s)}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Gl. (23) bzw. (24) stellen die geometrischen Orte aller Maxima der Fließbedingung Gl. (21) bei veränderlichem $c = \sigma_q/\sigma_s$ dar.

Die zweite Bedingung lautet $\sigma_1' = +1$; sie ergibt aus Gl. (22) $a = 0$. Aus Gl. (21) folgt dann, daß die Hüllparabel in zwei zur σ-Achse parallele Gerade übergeht, was der Hauptschubspannungstheorie entspricht.

Der Gleitwinkel ergibt sich aus Gl. (22) und (7) in der Form

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{4\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{a}\right)^2 - 1} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2(\sigma_1-\sigma_3)-a}{2(\sigma_1-\sigma_3)+a}}. \tag{25}$$

Die Spannung in der Gleitebene bekommt man aus den Gl. (4a), (4b) und (22) zu (vgl.[15])

$$\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{a}{4}, \tag{26a}$$

$$\tau = \pm\frac{1}{4}\cdot\sqrt{4(\sigma_1-\sigma_3)^2 - a^2}. \tag{26b}$$

Aus Gl. (26a), (26b) und (25) folgt $\operatorname{tg} 2\alpha = 4\tau/a$.

In Abb. 7 ist die Fließbedingung gemäß Gl. (21) graphisch dargestellt, wobei σ_q als unveränderlich angenommen und $c = 1$, 3 und ∞ gewählt wurde. Für $c = 1$ geht diese Fließbedingung in die Hauptschubspannungstheorie über. Für den Bereich $1 < c \leqq \infty$ stellt Gl. (21) eine Reihe von Parabeln dar und für $c = \infty$ geht sie nicht in die Hauptnormalspannungstheorie über. Wie Herr Prof. Dr.-Ing. A. Leon dem Verfasser mitteilte, hat man für $c = \infty$ bei einem festen Körper mit einem endlichen Wert σ_s und mit $\sigma_q = \infty$ zu rechnen. Dann ergibt sich aus Gl. (20) $p = \infty$; damit ergibt sich für $c \geqq 3$ aus Gl. (17) $\sigma = \sigma_s$ und aus Gl. (d) $\sigma_1 = +\sigma_s - p + p = +\sigma_s$ sowie $\sigma_3 = \sigma_s - 2p = -\infty$; damit geht die Mohrsche Theorie mit Hüllparabel in die Hauptnormalspannungstheorie über. Wir werden bei der Berechnung des plastischen Körpers für unbegrenzt wachsendes c stets einen endlichen σ_q-Wert bei gegen Null abnehmendem σ_s-Wert voraussetzen. Ist die Fließgrenze für einfachen Zug $\sigma_s = 0$, so ist auch die Fließgrenze bei Biegung und bei Verdrehung gleich Null, so daß man im Zweifel sein kann, ob man sich noch im Bereich eines festen Stoffes befindet.

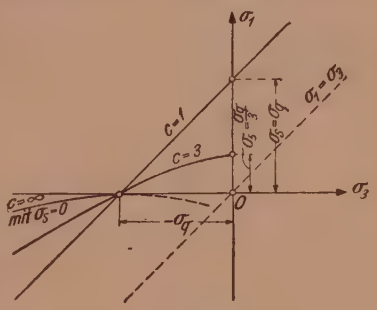

Abb. 7.

Bei einem Werkstoff, dessen Streckgrenze σ_s im Vergleich mit einer endlich großen Quetschgrenze σ_q sehr klein ist, nähert sich der Gleitwinkel beim einachsigen Druckversuch $\alpha_q = 0$. Dies liefert eine theoretische Erklärung für den Bruch spröder Stoffe beim einachsigen Druckversuch mit geschmierten Druckflächen, bei dem die Bruchflächen ungefähr parallel mit der Druckrichtung verlaufen.

Über die weiteren ausführlichen Untersuchungen der Eigenschaften der Hüllparabel sei auf die Abhandlungen von Leon[5,15] hingewiesen. Mit der Hüllparabel hat Leon[5,15] bewiesen, daß die Mohrsche Theorie auch den Trennbruch enthält. Mittels der Spannungskreise im Scheitel der Hüllparabel erklärte Leon[5,15] die Versuche von Mörsch auf Beton, wobei die Ursache, warum die Druckspannungen senkrecht zur Zugrichtung innerhalb bestimmter Grenzen keinen Einfluß ausüben, angegeben ist. Die Hüllparabel nach Leon[5] ergibt die theoretische Erklärung für die versuchsmäßig schon oft beobachtete Unabhängigkeit der Zerreißspannung vom Spannungszustand.

Da die Fließbedingung nach Gl. (21) von Leon[5] fast alle Forderungen der Theorie der Mohrschen Hüllkurve erfüllt, wird sie bei den folgenden Berechnungen des plastischen Körpers verwendet. Dabei ist diese Theorie wie jede andere Theorie mit gekrümmter Hüllinie in einigen Fällen nur begrenzt verwendbar, wie dies im nächsten Abschnitt IV gezeigt wird. Wieweit sie mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt, muß von Fall zu Fall untersucht werden. Unsere Aufgabe war, eine solche Fließbedingung zu finden, die in allen Gebieten, sowohl im Gebiete von $+\sigma$ als auch im Gebiete von $-\sigma$ der Mohrschen Darstellung mögliche Ergebnisse liefert.

IV. Das auf Innen- und Außendruck beanspruchte Rohr.

Die in der Einleitung gemachte Voraussetzung, daß die Hauptnormalspannung σ_2 die mittlere Spannung bedeutet, entspricht beim Rohr für gewisse Werte der Querzahl m (besonders $m = 2$) dem ebenen Verzerrungszustand ($\varepsilon_2 = 0$). Die Gleichgewichtsbedingung für das Rohr lautet bekanntlich

$$\sigma_t - \sigma_r = r \cdot \sigma_r', \tag{27}$$

wobei mit σ_t die Tangential- und mit σ_r die Radialspannung bezeichnet ist; r ist der Halbmesser einer beliebigen Rohrschicht und $\sigma_r' = d\sigma_r/dr$. Führen wir Gl. (27) in die Fließbedingung Gl. (21) ein, so bekommt man die Differentialgleichung

$$(r \cdot \sigma_r')^2 + a \cdot r \cdot \sigma_r' + 2\,a \cdot \sigma_r = b^2. \tag{28}$$

Gl. (28) kann man auch in der Form $(r \cdot \sigma_r' + a/2)^2 = b^2 - 2\,a\,\sigma_r + a^2/4$ schreiben,

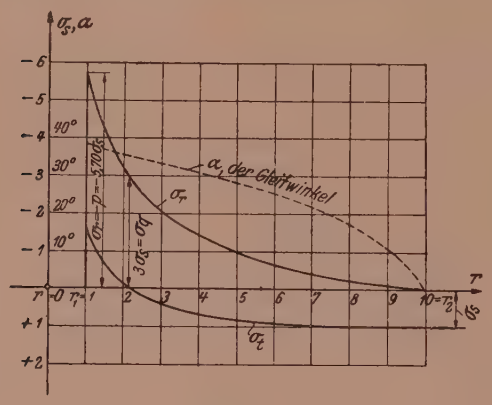

Abb. 8.

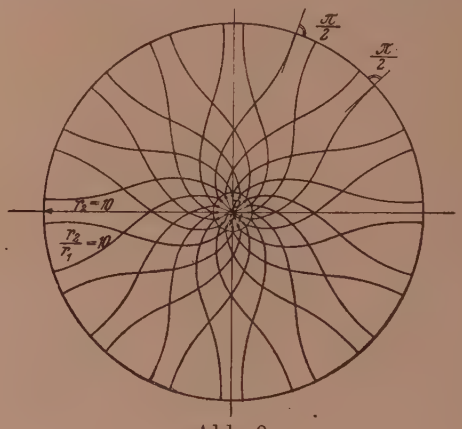

Abb. 9.

womit die Trennung der Variablen leicht gelingt. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen, daß für $r = r_2$ sich $\sigma_r = 0$ ergibt, erhält man die Lösung

$$\left(\frac{r_2}{r}\right)^2 = \frac{Z}{K} \cdot e^{\frac{2}{a}(Z-K)}; \tag{29}$$

hier ist

$$Z = \pm\sqrt{a^2/4 + b^2 - 2\,a\,\sigma_r} - a/2 \quad \text{und} \quad K = \pm\sqrt{a^2/4 + b^2} - a/2.$$

Ist das Rohr auf Innendruck beansprucht, dann bedeutet r_2 den Außenhalbmesser des Rohres ($r \leqq r_2$). Die in den Ausdrücken Z und K der Gl. (29) vorkommenden Wurzeln sind mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Gl. (29) gilt in diesem Falle nur für $c \leqq 3$, da mit $c > 3$ nach Gl. (23) $\sigma_k < 0$ ist; es ist nicht mehr möglich, den Spannungskreis für den einachsigen Zug rechnungsmäßig zu erfassen; die Randbedingung am Außenrande des Rohres (für $r = r_2$ ist $\sigma_r = 0$) ist nicht mehr erfüllt. Man benötigt vielmehr auch eine Außenbelastung des Rohres von der Größe $\sigma_r = -\sigma_k = -\left(\frac{b^2}{2\,a} - \frac{3}{8}a\right)$ nach Gl. (23), damit Gl. (29) auch für $c > 3$ weiterhin gilt. Hier ergibt sich für $c \leqq 3$ nach Gl. (21), (29) und (38) $K = +\sigma_s$. Für $c = 3$ und $r_2/r_1 = 10$ (r_1 ist der Innenhalbmesser des Rohres) sind in Abb. 8 die Spannungen σ_t und σ_r als Funktion der Veränderlichen r dargestellt. Sie sind aus Gl. (21) und (29) berechnet. Mit $p = 5{,}70\,\sigma_s$ ist in Abb. 8 diejenige Belastung angegeben, unter welcher das ganze Rohr in plastischen Zustand übergeht. In Abb. 8 ist noch der Gleitwinkel α als Funktion von r strichliert gezeichnet. Diese Abhängigkeit wurde nach Gl. (21), (25) und (29) aufgestellt. Sie diente zur graphischen Ermittlung der Gleitlinien, die in Abb. 9 für $c = 3$ und $r_2/r_1 = 10$ angegeben sind. Am Außenrande

des Rohres ($r = r_2$) verlaufen die Gleitlinien senkrecht zum Rande, da dort einachsiger Zug $\sigma_t = + \sigma_s$ herrscht. Im Querschnitt eines gußeisernen Rohres würden die Gleitlinien wie in Abb. 9 auftreten, da für diesen Werkstoff $c \doteq 3$ (s. Leon[5]) ist.

Ist das Rohr auf Außendruck beansprucht, dann bedeutet r_2 den Innendurchmesser des Rohres ($r \geqq r_2$). Die in den Ausdrücken Z und K der Gl. (29) vorkommenden Wurzel sind mit negativem Vorzeichen zu nehmen. Gl. (29) gilt in diesem Falle für alle c-Werte ($\infty \geqq c \geqq + 1$). Hier ergibt sich nach Gl. (29) und (38) $K = - \sigma_q$.

Beim Übergang auf $c = 1$ ergibt sich aus Gl. (29) die unbestimmte Form $\frac{o}{o}$, die schließlich in die Gleichung entsprechend der Hauptschubspannungstheorie[14] übergeht.

V. Über die Festigkeit von Schneiden.

Die dieser Untersuchung gemachten Voraussetzungen sind eingehend in den Arbeiten von Prandtl[1] beschrieben. Sie werden als bekannt angenommen. Hierbei sei bemerkt, daß die Gleitlinien keine logarithmischen Spiralen sind (wie bei der Hüllgeraden), da nach der Mohrschen Theorie mit Hüllparabel von Leon[5] die Gleitwinkel im plastischen Körper mit dem Spannungszustand sich ändern. Diese Gleitlinien sind Charakteristiken der Differentialgleichung. In Abb. 10 ist die stumpfe Schneide mit dem Schneidewinkel 2ϑ dargestellt. Es wird der Spannungszustand im Sektor ABD untersucht. Aus den Gleichgewichtsbedingungen eines keilförmigen Körperelementes ergibt sich nach Prandtl[19]

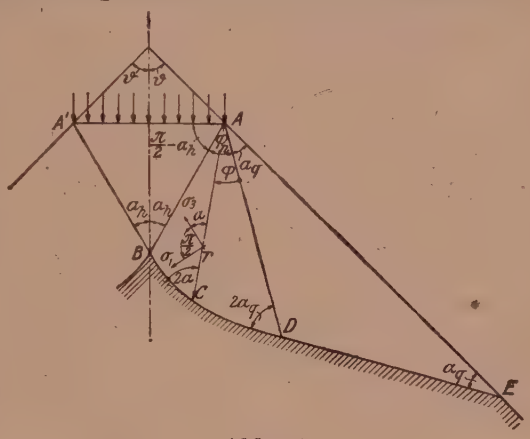

Abb. 10.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= -\frac{\sigma_t''}{2} \\ \text{und} \qquad \tau &= -\frac{1}{2} \cdot \sigma_t' \\ \text{mit} \qquad \sigma_t' &= d\sigma_t/d\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

wobei der Winkel φ nach Abb. 10 zu nehmen ist. σ_t, σ_r und τ entsprechen also den Komponenten des ebenen Spannungszustandes. Auf die allgemeine Bedeutung der Gl. (30) haben Biezeno und Grammel[19] hingewiesen. Die Hauptnormalspannungen dieses Spannungszustandes lauten bekanntlich

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_r) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_t - \sigma_r)^2 + 4\,\tau^2}. \qquad (31)$$

Die Fließbedingung Gl. (21), ausgedrückt durch die Spannungskomponenten, lautet

$$(\sigma_t - \sigma_r)^2 + 4\,\tau^2 + a\,(\sigma_t + \sigma_r) = b^2. \qquad (32)$$

Aus Gl. (30) und (32) folgt die Differentialgleichung

$$\sigma_t''^2 + 2\,a\,\sigma_t'' + 4\,\sigma_t'^2 + 8\,a\,\sigma_t = 4\,b^2. \qquad (33)$$

Aus Gl. (33) erhält man durch Differentiation die Lösung des Problems. (Die Lösung der Gl. (8) von Prandtl in „Nachr. Ges. Wiss. Göttingen" 1920, S. 74, kann man auch durch Differentiation leicht ermitteln.) Dann bekommt man

$$(\sigma_t''' + 4\,\sigma_t')\,(\sigma_t'' + a) = 0. \qquad (34)$$

Der erste Ausdruck der Gl. (34) $\sigma_t''' + 4\,\sigma_t' = 0$ ergibt die Lösung

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= A \sin 2\varphi + B \cos 2\varphi + C/4, \\ \text{mit} \qquad C &= \frac{2}{a}\,[b^2 - 4\,(A^2 + B^2)]. \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

Aus Gl. (g) und (30) lassen sich die Spannungen σ_r und τ ausrechnen, mit welchen man aus Gl. (31) die Hauptnormalspannungen bekommt

$$\sigma_{1,3} = \frac{C}{4} \pm \sqrt{A^2 + B^2} = \text{Konst.} \tag{h}$$

Gl. (h) entspricht einem homogenen Spannungszustand, jedoch nicht dem hier gesuchten Spannungszustand, der nicht homogen sein kann.

Die zweite Lösung der Gl. (34) $\sigma_t'' + a = 0$ führt zu

$$\sigma_t = -\frac{a\,\varphi^2}{2} + C_1\,\varphi + C_2 \quad \text{mit} \quad C_2 = \frac{b^2}{2\,a} + \frac{a}{8} - \frac{C_1^2}{2\,a}. \tag{35a, b}$$

Mittels Gl. (35a) und (30) kann man die Spannungen σ_r und τ ausrechnen und daraus lassen sich aus Gl. (31) die Hauptnormalspannungen ermitteln mit

$$\sigma_{1,3} = -\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \varphi^2\right) + C_1\,\varphi + C_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a\,\varphi - C_1)^2 + \frac{a^2}{4}}. \tag{36}$$

Aus Gl. (36) ist ersichtlich, daß die Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3 wie bei Prandtl[1] nur vom Winkel φ und nicht von dem durch den Punkt A (Abb. 10) gehenden Radius r abhängig sind. Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind aus einer einzigen Anfangswertbedingung aufgestellt. Im Dreieck ADE (Abb. 10) herrscht die reine Druckspannung $\sigma_3 = -\sigma_q$, die parallel zur Abgrenzungsfläche AE der Schneide verläuft, während die senkrecht zur Randfläche AE stehende Spannung σ_1 gleich Null ist. Aus Abb. 10 folgt, daß für $\varphi = 0$ auch $\sigma_1 = 0$ sein soll. Dann bekommt man aus Gl. (36) und (35b) die Integrationskonstante

$$C_1 = -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4} + a\cdot\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}}. \tag{37a}$$

Mit den Größen $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_3 = -\sigma_q$ ergibt sich aus Gl. (21) die Quetschgrenze

$$\sigma_q = \frac{a}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}. \tag{38}$$

Aus Gl. (38), (37a) und (35b) bekommt man die Integrationskonstanten

$$C_1 = -\sigma_q\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\,\sigma_q}\right)^2} \quad \text{und} \quad C_2 = -\frac{\sigma_q}{2}\left(1 - \frac{a}{2\,\sigma_q}\right). \tag{37}$$

Aus Gl. (36) und (37) erhält man die Hauptnormalspannungen

$$\sigma_{1,3} = -\frac{\sigma_q}{2}\left\{1 + 2\,\varphi\left[\frac{a}{2\,\sigma_q} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\,\sigma_q}\right)^2}\right] \mp \right.$$
$$\left. \mp \sqrt{1 + 4\,\varphi\,\frac{a}{2\,\sigma_q}\left[\frac{a}{2\,\sigma_q} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\,\sigma_q}\right)^2}\right]}\right\}. \tag{39}$$

Im Dreieck $AA'B$ in Abb. 10 herrscht ein homogener Spannungszustand, der sich aus Gl. (39) mit $\varphi = \varphi_n$ berechnen läßt. Hierbei bedeutet gemäß Abb. 10

$$\varphi_n = \vartheta + (\alpha_h - \alpha_q). \tag{40}$$

Der Winkel α_h heißt der Gleitwinkel für die „Härtespannung σ_h". (Gemeint ist der spezifische Eindringungswiderstand.) Im Dreieck $AA'B$ steht die Spannung σ_3 senkrecht zur belasteten Fläche AA'; nach Prandtl[1] heißt sie die „plastische Härte", deren Wert sich aus Gl. (39) und (40) für $\sigma_3 = -\sigma_h$ ergibt mit

$$\sigma_h = \frac{\sigma_q}{2}\left\{1 + 2\,\varphi_n\left[\frac{a}{2\,\sigma_q}\varphi_n + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\,\sigma_q}\right)^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \sqrt{1 + 4\,\varphi_n\,\frac{a}{2\,\sigma_q}\left[\frac{a}{2\,\sigma_q}\,\varphi_n + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\,\sigma_q}\right)^2}\right]}\right\}. \tag{41}$$

Da der Winkel ϑ in Gl. (40) von vornherein gegeben ist, so hängt der Winkel φ_n von den Winkeln α_q und α_h ab. Den Winkel α_q kann man aus Gl. (25) berechnen. Man erhält

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2\,(\sigma_1 - \sigma_3) - a}{2\,(\sigma_1 - \sigma_3) + a}}. \tag{42}$$

Der Winkel α aus Gl. (42) wird für $\varphi = 0$ dem Winkel α_q gleich; mit $\varphi = 0$ ergibt sich aus Gl. (39) $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_3 = -\sigma_q$. Mit diesen Werten und $c = \sigma_q/\sigma_s$ ergibt Gl. (42)

$$\text{für } c \leqq 3\text{:}\quad \operatorname{tg} \alpha_q = \sqrt{\frac{c+1}{3c-1}}\,; \qquad \text{für } c \geqq 3\text{:}\quad \operatorname{tg} \alpha_q = \frac{1}{\sqrt{c+1}} \text{ (vgl. [15])}. \tag{43a, b}$$

Für den Winkel α_h ergibt sich aus Gl. (39), (40) und (42) die Bedingung

$$\operatorname{tg} \alpha_h = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4\,\varphi_n \cdot \frac{a}{2\,\sigma_q}\left[\frac{a}{2\,\sigma_q}\,\varphi_n + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\,\sigma_q}\right)^2}\right]} - \frac{a}{2\,\sigma_q}}{\sqrt{1 + 4\,\varphi_n \cdot \frac{a}{2\,\sigma_q}\left[\frac{a}{2\,\sigma_q}\,\varphi_n + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\,\sigma_q}\right)^2}\right]} + \frac{a}{2\,\sigma_q}}}. \tag{44}$$

Der in Gl. (44) vorkommende Ausdruck φ_n ist der Gl. (40) zu entnehmen. Die Gl. (40), (43) und (44) stellen ausreichende Bedingungen für die Berechnung der Winkel φ_n, α_h und α_q dar.

Für $c = 1$ und $\vartheta = \pi/2$ stimmt Gl. (41) mit dem Ergebnis von Prandtl[1] überein

$$\sigma_h = \sigma_q \left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \tag{45}$$

Dies entspricht der Hauptschubspannungstheorie als Sonderfall sowohl der Hüllgeraden nach Mohr[2] als auch der Hüllparabel nach Leon.[5]

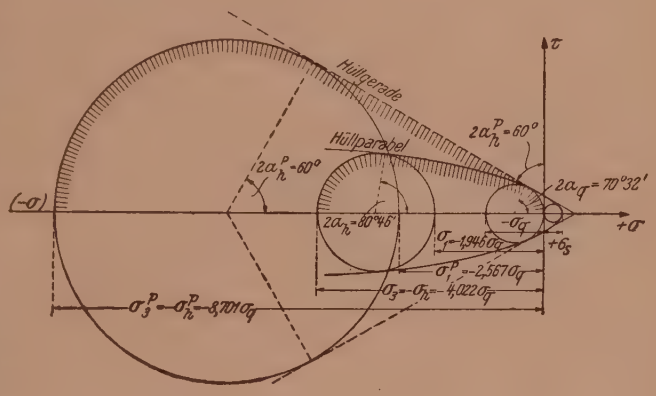

Abb. 11.

In Zahlentafel 3 sind die Ergebnisse von Prandtl[1] und die aus der vorliegenden Untersuchung für den Sonderfall $\vartheta = \pi/2$ zusammengestellt. Die Zahlentafel von Prandtl[1] ist durch den Wert $c = 26$ und durch $c = \infty$ ergänzt. Die Gleichungen, die die Beziehungen von Prandtl[1] und die vorliegenden verbinden, lauten

$$k = \cos 2\,\alpha \quad \text{und} \quad c = \frac{1+k}{1-k}. \tag{46}$$

In Zahlentafel 3 sind noch die Winkel φ_n, α_h und α_q für verschiedene c-Werte zusammengestellt. Wie aus Zahlentafel 3 ersichtlich ist, sind die Unterschiede der „plastischen Härten" σ_h nach Prandtl[1] (Hüllgerade) einerseits und Gl. (41) (Hüllparabel) anderseits für größere c-Werte beträchtlich. Um dies zu veranschaulichen, ist Abb. 11 für $c = 3$ gezeichnet, wobei sich für die Spannung σ_h ein Unterschied von 116% ergibt. In Abb. 11 sind die Werte von Prandtl[1] mit P bezeichnet. Der Spannungskreis, der die gesuchte Lösung enthält (hier σ_h), fällt nach der Berechnung von Prandtl[1] weit außerhalb der von Mohr[2] vorgesehenen Grenze. Die Funktion der „plastischen Härte" Gl. (41) für $c = \infty$ ($\sigma_s = 0$!) konvergiert zum Grenzwert $\sigma_h = 7{,}850\,\sigma_q$.

In Abb. 12 sind für $c = 3$ und $\vartheta = \pi/2$ links die Hauptnormalspannungstrajektorien und rechts die Gleitlinien dargestellt. Die Lösungen lassen sich aus einzelnen Sektoren mit stetigem Übergang der Spannungen zusammensetzen.

Zahlentafel 3. $\vartheta = \pi/2$.

Nach Prandtl		Gl. (46)	Gl. (41)	Gl. (43)	Gl. (40) und Gl. (44)	
k	σ_h/σ_q	c	σ_h/σ_q	α_q	α_h	φ_n
0	2,571	1	2,571	45° 00′	45° 00′	90° 00′
0,1736	3,499	1,4201	3,188	40° 45′	42° 07′	91° 22′
0,3420	5,194	2,0395	3,660	37° 37′	40° 58′	93° 21′
0,5000	8,701	3	4,022	35° 16′	40° 23′	95° 07′
0,6428	17,558	4,5991	4,369	33° 02′	39° 58′	96° 56′
0,9259	2297	26	5,793	23° 41′	39° 04′	105° 23′
1	∞	∞	7,850	0° 00′	38° 44′	128° 44′

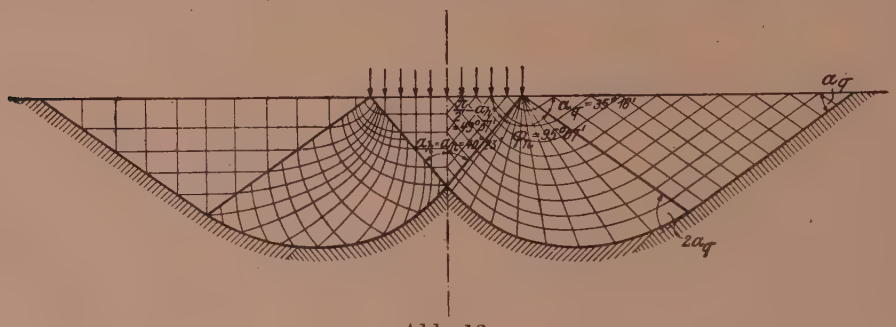

Abb. 12.

Für $c = \infty$ und $\vartheta = \pi/2$ wird der Winkel $\alpha_q = 0$ (s. Zahlentafel 3). Die Gleitlinien erstrecken sich dann links und rechts von der belasteten Fläche ($A\,A'$ in Abb. 10) ins Unendliche.

Für $c = \infty$ und $\vartheta = \alpha_h$ ergibt sich aus Gl. (40), (43) und (44) $\alpha_q = 0$, $\alpha_h = 33° 23'$ und $\varphi_n = 2\,\alpha_h = 66° 46'$ und aus Gl. (41) $\sigma_h = 3{,}125 \cdot \sigma_q$. — Der Fall $c = \infty$ und $\vartheta = 0$ ergibt $\alpha_q = \alpha_h = \varphi_n = 0$ mit $\sigma_h = \sigma_q$. Die Gleitlinien laufen parallel mit der Druckrichtung, wie schon in Abschnitt III, f, näher besprochen wurde.

Literatur:

[1] L. Prandtl: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen S. 74 (1920); Z. angew. Math. Mech. **1**, 15 (1921); Proc. of the 1. internation. congr. of applied mechanics, S. 43. Delft 1925. — [2] O. Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik, 3. Aufl., S. 192. W. Ernst & Sohn 1928. — [3] Handbuch der Physik, Bd. VI. Aufsatz von A. Nádai: Plastizität und Erddruck, S. 428. Springer-Verlag 1928. — [4] A. Reuss: Z. angew. Math. Mech. **10**, 267 (1930). — [5] A. Leon: Ing.-Arch. **4**, 421 (1933); Mitt. staatl. techn. Versuchsamtes, Wien **22**, 17 (1933); Gießerei **20**, 434 (1933); Bauing. **15**, 318 (1934); A. Leon u. A. Slattenschek: Gießerei **21**, 542 (1934). — [6] Th. v. Kármán: Forsch.-Arb. Ing.-Wes. H. 118, 37 (1912); Z. VDI **55**, 1749 (1911). — [7] B. P. Haigh: Engineering **109**, 158 (1920) und Rep. Brit. Association 1919, 1921, 1923; siehe auch Westergaard, Journal of Franklin Inst., May 1920. — [8] H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. **4**, 323 (1924). — [9] F. Schleicher: Z. angew. Math. Mech. **6**, 199 (1926). — [10] P. P. Bijlaard: Abhandlungen d. I. V. B. H., Bd. VI, S. 27. 1940/41. — [11] O. Domke: Glückauf **51**, 1129 (1915). — [12] Th. v. Kármán: Verh. d. 2. Intern. Kongr. f. Techn. Mechanik, S. 23. Zürich 1927. — [13] A. Nádai: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Springer-Verlag 1927. — [14] Hütte I, 26. Aufl. 1931; Aufsatz von A. Nádai: Mechanik der bildsamen Körper, S. 340. — [15] A. Leon: Beton u. Eisen **34**, 130 (1935). — [16] H. Bay: Ing.-Arch. **14**, 267 (1943). — [17] Diesen Fall der Gl. (21) ohne Angabe ihrer Gültigkeit ($c \leqq 3$) findet man bei W. v. Burzinsky: Schweiz. Bauztg. **94**, 259 (1929). Sie ist aber ohne Ableitungen, nur mit kurzen, allgemeinen Bemerkungen angegeben. — [18] Dies hat auch W. Prager in dem Aufsatz „Mechanik isotroper Körper im plastiischen Zustand" von H. Geiringer und W. Prager in „Ergeb. d. Exakt. Naturw." Bd. XIII, S. 311, berücksichtigt. — [19] C. B. Biezeno und R. Grammel: Technische Dynamik, Springer-Verlag 1939, S. 3.

(Eingegangen am 3. Dezember 1945.)

Die Beanspruchung der Motorenlager bei der Landung von Flugzeugen.

Von **K. Wolf**, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Bei einer allzu jähen Landung eines Flugzeuges zeigt es sich oft, daß unter Umständen ein Motor aus seiner Aufhängung herausgebrochen wird, selbst wenn diese mit vielfacher, schon die dynamische Beanspruchung berücksichtigender Sicherheit konstruiert ist. Es soll daher im folgenden untersucht werden, welche Schwingungserscheinungen bei dem Aufsetzen eines Flugzeuges auftreten, wenn wir dasselbe aus zwei miteinander elastisch verbundenen Teilen ansehen, den Rumpf mit den Flügeln und den daran angebrachten Motoren. Die Landung auf dem Boden wird ebenfalls durch eine elastische Federung, die Bugrad- und Fahrwerksfederung, vermittelt. Diese sei durch die Federkonstante c_1 charakterisiert, die Motorenaufhängung durch die Federkonstante c_2.

Da die Motoren — ihre Masse sei m_2, die des übrigen Flugzeuges m_1 — symmetrisch zur Achse liegen, können wir den Landevorgang dadurch idealisieren, daß wir eine Masse m_1, eine Feder mit der elastischen Konstante c_1, die am Boden gestützt ist, zusammendrücken lassen, wobei diese Masse mit einer zweiten m_2 wieder durch eine Feder mit der Konstante c_2 verbunden ist (vgl. Abb. 1).

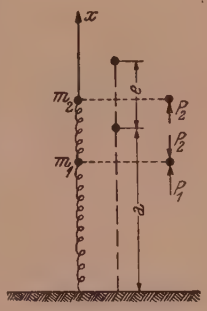

Abb. 1.

Mit den Bezeichnungen der Abbildung haben wir also, wenn x_1 die Koordinate des Schwerpunktes von m_1, x_2 die Koordinate des Schwerpunktes von m_2, a die ungespannte Länge der Bodenfederung, e den ursprünglichen Abstand der beiden Schwerpunkte bei ungespanntem Zustande der die Elastizität der Aufhängung versinnbildlichenden Feder bedeutet,

$$P_1 = c_1 (a - x_1),$$
$$P_2 = c_2 (e + x_1 - x_2)$$

und nach der dynamischen Grundgleichung

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 \ddot{x}_1 = c_1 (a - x_1) - c_2 (e + x_1 - x_2) - m_1 g, \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 \ddot{x}_2 = c_2 (e + x_1 - x_2) - m_2 g. \tag{2}$$

Für den Beginn der Landung für $x_1 = a$ und $x_2 = a + e$ müssen die rechten Seiten bis auf $m_1 g$ bzw. $m_2 g$ verschwinden.

Durch Addition erhält man

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = c_1 (a - x_1) - (m_1 + m_2) g \tag{3}$$

und wenn man (1) nach x_2 auflöst und zweimal nach t differenziert,

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{c_2} [m_1 \dddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \ddot{x}_2]. \tag{4}$$

Setzt man dies in (3) ein, so bekommt man

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{m_1 m_2}{c_2} \dddot{x}_1 + \frac{m_2}{c_2} (c_1 + c_2) \ddot{x}_1 = c_1 (a - x_1) - (m_1 + m_2) g. \tag{5}$$

Führt man zur Abkürzung die Eigenfrequenzen der beiden Federungen ein

$$\frac{c_1}{m_1} = \nu_1^2 \qquad \frac{c_2}{m_2} = \nu_2^2 \tag{6}$$

und schreibt für

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} = k, \tag{7}$$

so erhält diese Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für x_1 die Gestalt

$$\dddot{x}_1 + (\nu_1^2 + k\,\nu_2^2)\,\ddot{x}_1 + \nu_1^2\,\nu_2^2\,x_1 = \nu_2^2\,(\nu_1^2\,a - k\,g). \tag{8}$$

Ein partikulares Integral ist

$$z = a - \frac{k}{\nu_1^2}\,g,$$

die charakteristische Gleichung

$$v^4 + (\nu_1^2 + k\,\nu_2^2)\,v^2 + \nu_1^2\,\nu_2^2 = 0$$

hat die Wurzeln

$$v_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}\,(\nu_1^2 + k\,\nu_2^2 - \sqrt{\nu_1^4 + 2\,(k-2)\,\nu_1^2\,\nu_2^2 + k^2\,\nu_2^4}) = -\bar{\nu}_1^2, \tag{9}$$

$$v_{3,4}^2 = -\frac{1}{2}\,(\nu_1^2 + k\,\nu_2^2 + \sqrt{\nu_1^4 + 2\,(k-2)\,\nu_1^2\,\nu_2^2 + k^2\,\nu_2^4}) = -\bar{\nu}_2^2 \tag{10}$$

also

$$v_1 = i\,\bar{\nu}_1, \quad v_2 = -i\,\bar{\nu}_1, \quad v_3 = i\,\bar{\nu}_2, \quad v_4 = -i\,\bar{\nu}_2. \tag{11}$$

Da wegen $k > 1$ immer $(\nu_1^2 + k\,\nu_2^2)^2 > 4\,\nu_1^2\,\nu_2^2$ ist, so sind $v_{1,2}^2$ und $v_{3,4}^2$ immer reelle, negative Größen.

Das allgemeine Integral von (8) hat daher die Form

$$x_1 = a - \frac{k}{\nu_1^2}\,g + A\cos\bar{\nu}_1 t + B\sin\bar{\nu}_1 t + C\cos\bar{\nu}_2 t + D\sin\bar{\nu}_2 t \tag{12}$$

und nach Gl. (1) ergibt sich daraus

$$x_2 = \frac{1}{\nu_2^2\,(k-1)}\,[\ddot{x}_1 - \nu_1^2\,(a - x_1) + \nu_2^2\,(k-1)\,(e + x_1) + g]$$

oder

$$x_2 = a + e - \frac{g}{\nu_1^2}\,k - \frac{g}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_2^2\,(k-1)}\Big\{-\bar{\nu}_1^2\,(A\cos\bar{\nu}_1 t + B\sin_1\bar{\nu}t) - \bar{\nu}_2^2\,(C\cos\bar{\nu}_2 t + D\sin\bar{\nu}_2 t) + [\nu_1^2 + \nu_2^2\,(k-1)]\Big(a - \frac{k}{\nu_1^2}\,g + A\cos\bar{\nu}_1 t + B\sin\bar{\nu}_1 t + C\cos\bar{\nu}_2 t + D\sin\bar{\nu}_2 t\Big)\Big\}. \tag{13}$$

Für $t = 0$ muß $x_1 = a$ und $x_2 = a + e$, ferner $x_1 = x_2 = v_0$ sein, wenn v_0 die senkrechte Auftreffgeschwindigkeit bedeutet. Das gibt für A und C die Gleichungen

$$0 = -\frac{k}{\nu_1^2}\,g + A + C,$$

$$0 = \frac{g}{\nu_1^2}\,k - \frac{g}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_2^2\,(k-1)}\,\{-(\bar{\nu}_1^2\,A + \bar{\nu}_2^2\,C) + [\nu_1^2 + \nu_2^2\,(k-1)]\,(A + C)\}$$

also

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{g}{\nu_1^2}\,\frac{\nu_1^2 - k\,\bar{\nu}_2^2}{\bar{\nu}_1^2 - \bar{\nu}_2^2}, \\ C &= \frac{g}{\nu_1^2}\,\frac{\nu_1^2 - k\,\bar{\nu}_1^2}{\bar{\nu}_2^2 - \bar{\nu}_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und für B und D

$$B\,\bar{\nu}_1 + D\,\bar{\nu}_2 = -v_0,$$

$$B\,\bar{\nu}_1\,(\nu_2^2 - \bar{\nu}_1^2) + D\,\bar{\nu}_2\,(\nu_1^2 - \bar{\nu}_2^2) = 0,$$

also

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{v_0}{\bar{\nu}_1}\,\frac{\bar{\nu}_2^2 - \nu_1^2}{\bar{\nu}_1^2 - \bar{\nu}_2^2}, \\ D &= \frac{v_0}{\bar{\nu}_2}\,\frac{\nu_1^2 - \bar{\nu}_1^2}{\bar{\nu}_1^2 - \bar{\nu}_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Eingesetzt in (12) erhält man

$$x_1 = a - \frac{k\,g}{\nu_1^2} + \frac{1}{\bar{\nu}_1^2 - \bar{\nu}_2^2}\Big\{\frac{g}{\nu_1^2}\,[(\nu_1^2 - k\,\bar{\nu}_2^2)\cos\bar{\nu}_1 t - (\nu_1^2 - k\,\bar{\nu}_1^2)\cos\bar{\nu}_2 t] + v_0\Big(\frac{\bar{\nu}_2^2 - \nu_1^2}{\bar{\nu}_1}\sin\bar{\nu}_1 t + \frac{\nu_1^2 - \bar{\nu}_1^2}{\bar{\nu}_2}\sin\bar{\nu}_2 t\Big)\Big\}. \tag{16}$$

Um die Beanspruchung der Lager des Motors zu finden, sie ist proportional der Beschleunigung $\ddot{x}_2$ desselben, haben wir nur mehr diese Beschleunigung nach Gl. (4)

durch Bildung der entsprechenden Differentialquotienten von x_1 zu berechnen. Man erhält

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{\nu_2^2 (k-1)(\bar{\nu}_1^2 - \bar{\nu}_2^2)} \Big\{ \bar{\nu}_1 [\bar{\nu}_1^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 (k-1)] \Big[g \frac{\bar{\nu}_1}{\nu_1^2} (\nu_1^2 - k \bar{\nu}_2^2) \Big] \cos \bar{\nu}_1 t +$$
$$+ v_0 (\nu_1^2 - \bar{\nu}_2^2) \sin \nu_1 t + \bar{\nu}_2 [\bar{\nu}_2^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 (k-1)] \Big[- \frac{g \bar{\nu}_2}{\nu_1^2} (\nu_1^2 - k \bar{\nu}_1^2) \cos \bar{\nu}_2 t +$$
$$+ v_0 (\nu_1^2 - \bar{\nu}_1^2) \sin \bar{\nu}_2 t \Big] \Big\}. \qquad (17)$$

Da die weitere allgemeine Behandlung dieser Gleichung zu unübersichtlich wird, wollen wir numerische Werte für die Federkonstante c_1 und c_2 und für die Massen einführen, für verschiedene Werte von v_0 die Beschleunigung graphisch als Funktion von t darstellen und die Maximalwerte von $\ddot{x}_2$ miteinander und auch mit jenen vergleichen, die sich bei starrer Verbindung an Motoren und Rumpf ergeben.

Im letzteren Falle lautet unsere Differentialgleichung, wenn wir mit x_s die Entfernung des Gesamtschwerpunktes vom Boden und mit a wieder deren Anfangswert bezeichnen,

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{x}_s = c_1 (a - x_s) - (m_1 + m_2)\, g$$

oder

$$\frac{c_1}{m_1 + m_2} = \frac{\nu_1^2}{k} = \nu'^2$$

gesetzt,

$$\ddot{x}_s + \nu'^2 x_s = \nu'^2 a - g.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist durch

$$x_s = a - \frac{g}{\nu'^2} (1 - \cos \nu' t) - \frac{v_0}{\nu'} \sin \nu' t \quad (17)$$

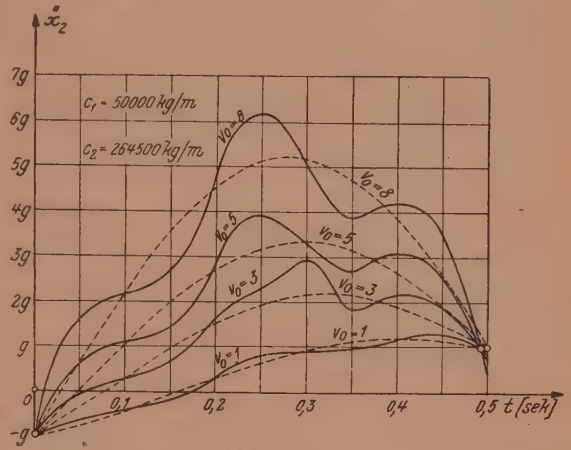

Abb. 2.

gegeben, wenn wieder die Anfangsbedingungen so gewählt werden, daß für $t = 0$, $x_s = a$ und $\dot{x}_s = v_0$ ist. Für die Beschleunigung haben wir daher

$$\ddot{x}_s = - g \cos \nu' t + v_0 \nu' \sin \nu' t. \qquad (18)$$

Der Maximalwert $\ddot{x}_s$ für $\operatorname{tg} \nu' t = - \frac{v_0 \nu'}{g}$ ist dem Betrage nach gegeben durch

$$\ddot{x}_s = \sqrt{g^2 + v_0^2 \nu_1^2}.$$

Aus Gl. (18) bekommen wir also die Werte für die Beanspruchung der Motorenlager beim Landen im Falle starrer Verbindung von Motor und Rumpf.

Setzt man für das Gewicht des Flugzeuges 12500 kg, für das der Motoren 3650 kg an und nimmt man für die Federkonstante der Bug- und Fahrwerkfederung $c_1 = 50000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, für die der Motoraufhängung $c_2 = 263000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, alles Werte, wie sie in Wirklichkeit vorkommen, so ist

$$\nu_1^2 = 55{,}43, \quad \nu_2^2 = 706{,}85, \quad k = 1{,}412.$$

Daraus erhält man

$$\bar{\nu}_1^2 = 38{,}6, \quad \bar{\nu}_2^2 = 948{,}4, \quad \bar{\nu}_1 = 6{,}21, \quad \bar{\nu}_2 = 30{,}8$$

und für die Beschleunigung

$$\ddot{x}_2 = \frac{g}{910{,}8} \{ - 943{,}0 \cos (6{,}21\, t) + 31{,}85 \cos (30{,}8\, t) + v_0 [596{,}5 \sin (6{,}21\, t) -$$
$$- 107{,}8 \sin (30{,}8\, t)] \}.$$

Diese Werte sind für $v_0 = 1, 3, 5, 8$ m/sek. für die Zeit von Null bis $^1/_2$ Sekunde ausgerechnet und in Abb. 2 graphisch dargestellt, wobei als Einheit die Erdbeschleunigung g

gewählt wurde. Die Beträge für eine starre Verbindung von Motor und Flügel sind zum Vergleich für dieselben Werte von v_0 strichliert eingetragen. Man erkennt, daß der Größtwert der Beschleunigung schon für $v_0 = 5$ m/sek. einem Wert der Landegeschwindigkeit, der noch keineswegs als abnorm groß bezeichnet werden kann, fast das vierfache der Erdbeschleunigung erreicht. Außerdem zeigt es sich, daß diese Beschleunigung und damit die Beanspruchung der Lager der Motoren bei elastischer Aufhängung bei den gewählten Federkonstanten immer, und zwar um 10 bis 25% größer ausfällt als bei starrer Verbindung.

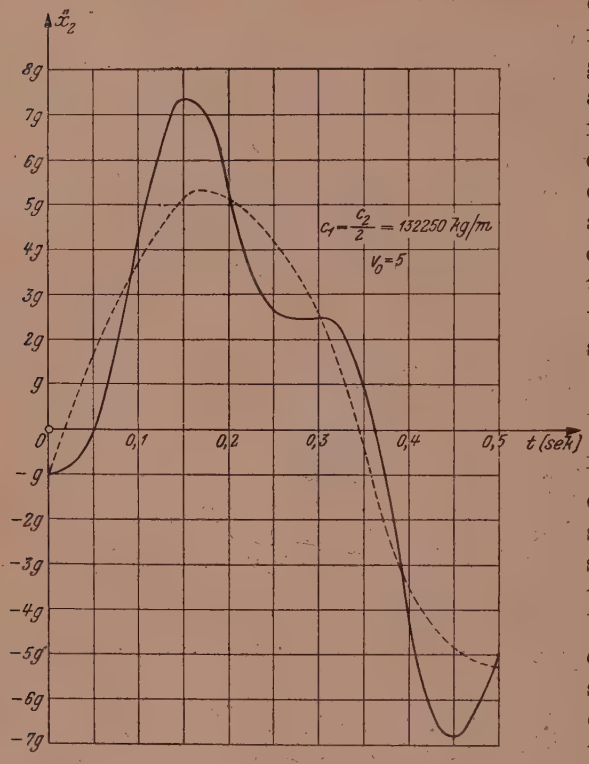

Abb. 3.

Wählt man ein anderes Verhältnis von c_1 und c_2, also der Härten der Federung, setzt man etwa $c_1 = \frac{c_2}{2}$, so werden die Verhältnisse noch bedeutend schlechter. Die entsprechenden Werte sind für $v_0 = 5$ m/sek. in Abb. 3 aufgetragen, die Beschleunigung geht jetzt bis auf das 7,3fache von g hinauf und der Unterschied gegenüber der Beanspruchung im Falle der starren Verbindung von Rumpf und Motor wird beträchtlich größer, er erhöht sich auf 38%. Wenn also die pneumatische Federung des Bugrades auch nur teilweise versagt, so steigt die Beanspruchung der Motorenlager beträchtlich an und sie ist größer bei einer elastischen als bei einer ganz starren Verbindung. Noch ungünstiger wird die Beanspruchung in dem praktisch höchstens bei fast völligem Versagen der Bugradfederung eintretenden Fall, daß c_2 gleich oder gar kleiner als c_1 ausfällt.

(Eingegangen am 11. Oktober 1945.)

Zur Frage der Temperaturdimension.

Von **C. Kämmerer**, Wien.

Um die Methoden der Dimensionsanalyse[1, 3] auch auf molekulare Verhältnisse anwenden zu können, ist es, wie gezeigt wird, von Vorteil, den bereits in Verwendung stehenden Mol- oder Molekülbegriff als vierte Grundgröße aufzufassen und die Temperatur als zusammengesetzte Größe einzuführen.

Bekanntlich ist jede physikalische Größe, z. B. 10 sec, durch eine Zahl und Angabe des Begriffes oder Gegenstandes, der mit dieser Zahl vervielfacht werden soll, gegeben. Durch den Begriff ist die Dimension (auch Qualität) der physikalischen Größe bestimmt, während die Zahl selbst für die Dimension ohne Bedeutung ist.

In der äußeren Wärmelehre genügen nun vier derartige Begriffe, nämlich: Länge, Masse, Zeit und Temperatur (L, M, Z, ϑ) als Grundeinheiten, um die Dimension

aller übrigen vorkommenden Größen in Form von Potenzprodukten aus ihnen abzuleiten.[3] So ist z. B. die Dimension der Entropie schlechthin, d. h. ohne Bezug auf 1 kg oder Mol:

$$[S] = \left[\frac{\text{kcal}}{\text{Grad}}\right] = \left[\frac{\text{Meter} \times \text{Kraft}}{\text{Grad}}\right] = [L^2\, M\, Z^{-2}\, \vartheta^{-1}]. \qquad (1)$$

Die Auffassung der Temperatur als Grundgröße ist aber nur vom Standpunkt der äußeren oder phänomenologischen Thermodynamik, d. h. bei Ausschaltung aller Vorstellungen oder Theorien vom inneren oder atomistischen Wesen der Wärme begründet. Nach der kinetischen Theorie ist die Temperatur als mittlere kinetische Energie der translatorischen oder schwingenden Bewegung des Molekülschwerpunktes zu betrachten und erhält die Dimension einer Energie oder Arbeit je Mol oder Molekül $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{Mol}}\right]$. Abwegig wäre es, der Temperatur die Dimension einer Energie schlechthin (also ohne Bezug auf 1 Mol) zu erteilen,[4, 5] da es sich offensichtlich um eine molekulare oder atomistische Größe und nicht um eine Energie im makroskopischen Sinne handelt, was in der Dimensionsformel unbedingt zum Ausdruck kommen muß.

Danach wird die Temperatur zu einer zusammengesetzten Größe mit der Dimensionsformel:

$$[\vartheta] = \left[\frac{\text{kcal}}{\text{Mol}}\right] = \left[\frac{\text{Meter} \times \text{Kraft}}{\text{Mol}}\right] = [M\, L^2\, Z^{-2}\, \text{Mol}^{-1}], \qquad (2)$$

in der nun das Mol (oder Molekül) als vierte Grundeinheit vorkommt. Tatsächlich wird der Mol- oder Molekülbegriff in den Dimensionsformeln der Physik seit langem verwendet, ohne jedoch eigentlich als Grundgröße zu gelten.[5] Gleichzeitig wird aber die Temperatur als Grundgröße beibehalten, so daß im ganzen fünf Grundeinheiten, nämlich L, M, Z, ϑ und Mol in Gebrauch sind. Vgl. z. B. die übliche Dimensionsformel für die allgemeine Gaskonstante:

$$[\mu\, R] = \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kMol} \times \text{Grad}}\right] = [M\, L^2\, Z^{-2}\, \text{Mol.}^{-1}\, \vartheta^{-1}]. \qquad (3)$$

Betrachtet man nun die Temperatur im Sinne der kinetischen Theorie als zusammengesetzte Größe nach Gl. (2), so genügen wieder vier Grundeinheiten, nämlich L, M, Z und Mol, und es sind wesentlich einfachere Dimensionsformeln erzielbar. Mit Gl. (2) wird z. B. die Dimension der molaren Gaskonstanten: $[\mu\, R] = 1$, d. h. die molare Gaskonstante wird zu einer reinen, dimensionslosen Zahl.

Mit der angeführten Temperaturdimension erweisen sich sogleich einige weitere, bekannte Größen der physikalischen Chemie, z. B. die Molwärme $\mu\, c_p \left[\frac{\text{kcal}}{\text{Mol} \times \text{Grad}}\right]$, die Molentropie $\mathfrak{S}\left[\frac{\text{kcal}}{\text{Mol} \times \text{Grad}}\right]$, die molekulare Verdampfungsentropie usw. als dimensionslos, wobei also Ähnlichkeiten molekularer Natur zum Ausdruck kommen.[1]

Hingegen ergibt sich als Dimension der Entropie schlechthin (d. h. ohne Bezug auf 1 Mol oder kg):

$$[S] = \left[\frac{\text{kcal}}{\text{Grad}}\right] = \left[\frac{\text{kcal} \times \text{Mol}}{\text{kcal}}\right] = [\text{Mol}]. \qquad (4)$$

Sie kann daher nach Molen oder Molekülen gezählt werden, und zwar ist, wie später gezeigt wird,

$$1\ \text{Entropieeinheit (1 Clausius)} = \frac{1\,\text{kcal}}{1^\circ\,\text{C}} = \frac{1}{3}\ \text{kMol} \doteq 2{,}10^{26}\ \text{Moleküle}.$$

Dieses Ergebnis läßt vermuten, daß die Entropie eine nicht stetig, sondern sprunghaft veränderliche Größe ist, was im Sinne der Quantenlehre auch tatsächlich zutrifft.

Irreführend ist hingegen, wenn die Entropie von Bodea[5] als dimensionslos oder als eine Art „umgekehrter Wirkungsgrad" bezeichnet wird.

Da in einem bestimmten Zeitpunkt die Geschwindigkeiten c [m/sec.] und bei Gasgemischen oder assoziierten Stoffen auch die Massen $m\left[\frac{\text{kg} \times \text{sec}^2}{\text{m}}\right]$ der einzelnen

Moleküle sehr verschieden sind, so läßt sich die absolute Temperatur nur als Mittelwert über eine große Molekülzahl (x) angeben. Bekanntlich ist:

$$\frac{m\,c^2}{2} = 3\,k\,T/2,$$

wobei $\frac{m\,c^2}{2}$ die mittlere Translationsenergie pro Molekül und k die Boltzmann-Konstante bedeutet. Durch Einsetzen von $k = \frac{(\mu\,R)}{N} = \frac{1{,}9864}{N} \doteq \frac{2}{N}$ erhält man:

$$T\,[\text{Grad}\,K] = \left(\frac{N}{2{,}98}\right)\frac{1}{x}\sum_{1}^{x}\left(\frac{m\,c^2}{2}\cdot\frac{1}{427}\right)\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kMol}}\right]. \tag{5}$$

Dabei bedeutet N die Loschmidtsche Zahl $= 6{,}02 \cdot 10^{26}$ [Moleküle/kMol] und $\sum_{1}^{x}\left(\frac{m\,c^2}{2}\cdot\frac{1}{427}\right)$ die Energiesumme über x Elemente in $\left[\frac{\text{kg}\times\text{m}}{427}\right] = [\text{kcal}]$.

Der Faktor $N/2{,}98$ wird nach Gl. (2) zu einem bloßen Umrechnungsbeiwert ohne Dimension, was von physikalischer Seite bisher nicht bestätigt wurde,[2] obwohl seine Dimensionslosigkeit im Wesen der kinetischen Temperaturauffassung gelegen ist.

Nachdem 1 kMol nur eine bestimmte Zahl von Molekülen bedeutet, so ist die Loschmidtsche Zahl N [Moleküle/kMol] als dimensionslos zu betrachten, soferne es sich um physikalische (nicht chemische) Moleküle handelt. Da nach früherem auch die allgemeine Gaskonstante ($\mu\,R$) als reine Zahl zu betrachten ist, so wird die Boltzmann-Konstante $k = \mu\,R/N$ nach der eingangs erwähnten Temperaturauffassung ebenfalls dimensionslos.

In Gl. (5) ist die Zahl x der betrachteten Elemente als beliebig angenommen; sie muß aber derart groß sein, daß zeitliche Schwankungen des Mittelwertes nicht mehr bemerkbar sind.

Für 1 kMol oder $x = N$ wird nach Gl. (5):

$$T = \frac{1}{2{,}98}\sum_{1}^{N}\left(\frac{m\,c^2}{2}\cdot\frac{1}{427}\right)\cdot\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kMol}}\right] \tag{6}$$

und die der Temperatur entsprechende Energiesumme, auch „Temperaturenergie" genannt:

$$\sum_{1}^{N}\left(\frac{m\,c^2}{2\,g}\cdot\frac{1}{427}\right) = 2{,}98\cdot T\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kMol}}\right], \tag{6a}$$

1° C entspricht also im technischen Maßsystem:

$$1^\circ\,\text{C} = 2{,}98\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kMol}}\right] \quad \text{oder} \quad \frac{2{,}98\cdot 10^{-26}}{6{,}02} = 0{,}495\cdot 10^{-26}\left[\frac{\text{kcal}}{\text{Molekül}}\right]$$

und im ($c\,G\,S$)-System:

$$1^\circ\,\text{C} = 2{,}075\cdot 10^{-16}\left[\frac{\text{Erg}}{\text{Molekül}}\right].$$

Für 1 kg eines Stoffes ist die „Temperaturenergie" nach Gl. (6a):

$$U_t = 2{,}98\,T/\mu, \tag{7}$$

wenn mit μ das Molekulargewicht oder genauer das „Molgewicht" in [kg/kMol] bezeichnet wird.

Zur richtigen Auslegung von Gl. (2), (6) und (7) ist der Begriff des Mols oder Moleküls genauer zu definieren. In chemischer Auffassung bedeutet 1 kMol stets μ_0 kg des betreffenden Stoffes, also z. B. 18 kg H_2O oder 2 kg H_2 ohne Rücksicht darauf, ob der betreffende Stoff im Gaszustand teilweise dissoziiert oder im flüssigen Zustand teilweise assoziiert ist. Im Sinne der kinetischen Theorie ist aber unter „Molekül" jedes für sich oder selbständig bewegte Teilchen, also auch jedes Atom, freies Elektron, Doppel- oder Mehrfachmolekül zu verstehen.

1 physikalisches kMol entspricht daher einer Stoffmenge, in welcher gerade $N = 6{,}02 \times 10^{26}$ selbständig bewegte Teilchen enthalten sind und das physikalische oder scheinbare Molekulargewicht μ [kg/kMol] ist das Gewicht von N solcher Teilchen. Sind z. B. in einer Mischung x_1 Moleküle H_2O und x_2 Moleküle 2 (H_2O) (Doppelmoleküle) enthalten, so ist die Gesamtzahl der physikalischen Moleküle $x_1 + x_2$, während die der chemischen Moleküle $x_1 + 2\,x_2$ beträgt. Durch die teilweise Assoziierung wird also das physikalische Molekulargewicht $\mu > \mu_0$ und die Zahl der selbständigen Elemente je 1 kg hat abgenommen.

Nach Gl. (5) und (6) sind bei thermodynamischen Rechnungen stets die physikalischen Begriffe Mol, Molekül, physikalisches Mol usw. zu verwenden, was z. B. bei Bestimmung der speziellen Gaskonstante $R = \frac{848}{\mu}\left[\frac{m}{\text{Grad}}\right]$ zu beachten ist.

Da im flüssigen Zustand oder bei hohen Drücken mit Assoziierung zu rechnen ist, kann μ (oder R) für den ganzen Zustandsbereich nicht mehr als Festwert gelten; allen Rechnungen mit konstantem R (oder μ), die sich nicht ausschließlich auf den Gaszustand beziehen, z. B. den bekannten Zustandsgleichungen, kommt daher eine gewisse Ungenauigkeit zu und die Verschiedenheit der Assoziierungsgrade ist unter anderem als Ursache für die Nichtübereinstimmung dieser Gleichungen mit der Erfahrung zu betrachten.

Beim festen Zustand und bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt der Temperatur verliert der Gleichverteilungssatz seine Gültigkeit. Die kinetische Energie ist nach den Gesetzen der Quantentheorie nur auf einige wenige Moleküle verteilt, während die übrigen bereits in Ruhe, d. h. als assoziiert oder als große Molekülgruppen zu betrachten sind. Die Zahl $N\,\mu$ der selbständigen Elemente je 1 kg wird dann sehr klein (oder das scheinbare Molekulargewicht μ sehr groß) und die „Temperaturenergie“ U_t [kcal/kg] verschwindet nach Gl. (7) in höherer Ordnung als T.

Im Nullpunkt selbst ist nur mehr ein Kontinuum oder ein einziges Großmolekül mit dem scheinbaren Molekulargewicht $\mu = \mu_0 \times 6{,}02 \cdot 10^{26}$ vorhanden (μ_0 = chemisches Molekulargewicht). In diesem „temperaturlosen“ Zustand verliert der physikalische Molbegriff natürlich seinen Sinn.

Die vorliegende Arbeit soll nicht etwa ein Vorschlag zur allgemeinen Einführung der abgeleiteten Dimensionsformeln sein, sondern nur die Voraussetzung zur Anwendung dimensionsanalytischer Methoden in der Wärmelehre schaffen, um auf diesem Wege zur Klärung bekannter Näherungsgesetze[1] oder zur Auffindung neuer Beziehungen beizutragen. Vgl. z. B. die Einführung reduzierter, d. h. dimensionsloser Temperaturen, Drücke und Volumina in die Zustandsgleichung oder die großen Vorteile, welche das Rechnen mit dimensionslosen Größen oder Kennzahlen in der Wärmeübergangslehre ergeben haben.

Daß die nach Einführung der Temperaturdimension sich als dimensionslos oder maßstabunabhängig erweisenden Größen für viele Stoffe ähnlich und in manchen Fällen sogar gleich verlaufen, kommt in bekannten Näherungsformeln[1] zum Ausdruck, was an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

1. Auf der Dimensionslosigkeit der Molwärme ($\mu\,c_p$) beruht das von Dülong und Petit im Jahre 1818 aufgestellte Näherungsgesetz, daß die Atomwärme aller festen Elemente zwischen 20° und 50° C nahezu gleich ist und ungefähr 6,4 kcal je kg Atom beträgt.

2. Die Dimensionslosigkeit der molekularen Verdampfungsentropie von Flüssigkeiten kommt in der Regel von Trouton zum Ausdruck, wonach die Größe $\mu\,r/T$ für alle Flüssigkeiten nahezu den gleichen Wert hat (r = Verdampfungswärme bei 1 ata).

Abweichungen von Regel 2 sind nach obigem bei starker Assoziierung oder Dissoziierung zu vermuten, wenn also das scheinbare oder physikalische Molekular-

gewicht μ mit dem chemischen μ_0 nicht mehr übereinstimmt. So ist bekannt, daß die mehr oder weniger starke Assoziierung der Flüssigkeiten eine der wesentlichen Ursachen des Verstoßes gegen die Regel von Trouton bildet.

Die Regel von Dülong und Petit betrifft nur ein kleines Temperaturgebiet. Die Atomwärme fester Körper verläuft aber auch für tiefe Temperaturen bis zum Nullpunkt herab für alle Stoffe in ähnlicher Weise, was in der 1912 von Rasch gefundenen Beziehung:

$$\mu c = a\, e^{-\left(\frac{\vartheta}{T}\right)} \tag{8}$$

oder für ganz tiefe Temperaturen in der von Debeye ebenfalls 1912 theoretisch abgeleiteten Beziehung:

$$\mu c_v = b\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \tag{9}$$

zum Ausdruck kommt.

In Gl. (8) und (9) sind a und b Festwerte, ϑ und Θ bedeuten besondere, für jeden Stoff charakteristische Temperaturen. In diesen Näherungsformeln, die übrigens gut mit der Erfahrung übereinstimmen, kommen nun zwei dimensionslose Größen, nämlich μc bzw. μc_v und ϑ/T bzw. T/Θ vor, so daß nach dem Vorbild der Wärmeübergangsbeziehungen ein großer Gültigkeitsbereich oder sogar Gleichheit der Festwerte a bzw. b für alle festen Stoffe zu erwarten ist.

Tatsächlich erhält man bei Auftragung der einen dimensionslosen Größe über der anderen, also der Atomwärme über (ϑ/T), für Körper mit regulär kristallisierenden Elementen und Verbindungen mit Atomen nicht allzu verschiedenen Gewichtes nur einen einzigen Linienzug bzw. dieselbe Konstante a in Gl. (8).

In der Debeyeschen Gl. (9) ist b eine universelle, für alle Stoffe gleich große Konstante, was von der Erfahrung gut bestätigt wird.

Literatur:

[1] Dimensionslose Größen in der Wärmelehre: Wärme **1941**, 117. — [2] Grimsehls Lehrbuch der Physik, Bd. I, S. 421. Berlin: Teubner 1936. — [3] Bridgman-Holl: Theorie der physikalischen Dimensionen. Berlin: Teubner 1932. — [4] Wärme- u. Kälte-Techn. **1939**, 107. — [5] Das Kalantaroff-Giorgische Maßsystem. Von Dr. Eugen Bodea. R. Oldenbourg 1943.

(Eingegangen am 14. Februar 1946.)

Zur Stabilität des Einrotor-Hubschraubers.

Von **H. Parkus**, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Die Stabilität des Hubschraubers mit einer oder mit zwei gegenläufigen Schrauben wurde von B. v. Schlippe und R. Dietrich[1] im Anschluß an die Arbeiten von Th. v. Kármán[2] und H. G. Küssner[3] untersucht, und zwar sowohl für den Fall des Schwebens an Ort, wie auch für den des Vorwärtsfluges. Diese Arbeiten setzen starr mit der Nabe verbundene Schraubenflügel voraus. Im Gegensatz hierzu weisen die im Hubschrauberbau ausschließlich verwendeten Rotoren Schlaggelenke für die Drehflügel auf. Die Stabilität von Hubschraubern dieser Bauweise wurde unter Beschränkung auf den Schwebezustand von K. Hohenemser[4] behandelt. Hierbei wurde ein Hubschrauber mit zwei gegenläufigen Rotoren vorausgesetzt.

Im nachstehenden werden die Ansätze von Hohenemser (ebenfalls für den Schwebeflug) auf Hubschrauber mit einem Rotor erweitert. Es wird zunächst die

sich als Gleichung sechsten Grades ergebende Frequenzgleichung aufgestellt und aus dieser werden dann einfachere Näherungsausdrücke für die vor allem interessierende instabile Schwingungsform abgeleitet.

2. Voraussetzungen.

Wir nehmen rechteckige, unverwundene Blätter an und verwenden die von Hohenemser[4, 5] vereinfachten Glauertschen Gleichungen für die stationäre Seitenanströmung einer Luftschraube. Weiters linearisieren wir das Problem in der üblichen Weise, indem wir kleine Schwingungsamplituden voraussetzen. Außerdem nehmen wir an, daß die Blätter näherungsweise in einer Ebene umlaufen, während sie in Wirklichkeit einen flachen Kegelstumpf beschreiben. Schließlich setzen wir voraus, daß zwischen Blattanstellwinkel und Schlagwinkel des Flügels keine Kopplung besteht, daß also der Anstellwinkel durch die Schlagbewegung nicht beeinflußt wird.

Bei verwundenen Blättern mit beliebigem Umriß legt man der Rechnung den maßgebenden Flügelschnitt in 0,7 R zugrunde.

3. Die Grundgleichungen.

Eine in ihrer Ebene angeströmte Schraube erfordert zum Ausgleich der Roll- und Längsmomente eine periodische Änderung des Blattanstellwinkels ϑ gemäß der Beziehung

$$\vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_1 \sin \psi, \tag{1}$$

wo ϑ_0 den mittleren Anstellwinkel und ϑ_1 die Amplitude der überlagerten periodischen Schwankung bedeutet. ψ ist der von der rückwärtigen Blattstellung im Umlaufsinn gemessene Drehwinkel des Blattes. Sämtliche Anstellwinkel sind auf die Nullauftriebslinie bezogen.

Der Winkel ϑ_1 hängt mit dem Fortschrittsgrad $\mu = \frac{v}{u}$ (v = Fortschrittsgeschwindigkeit, u = Umfangsgeschwindigkeit an der Flügelspitze) mittels der Gleichung

$$\vartheta_1 = 2\,\vartheta_0\,\mu \tag{2}$$

zusammen.

Beim waagrechten Flug wird diese erforderliche periodische Anstellwinkeländerung durch entsprechende Steuerorgane (Schwenkring) bewirkt. Sie tritt jedoch bei seitlicher Anblasung auch selbsttätig dadurch ein, daß sich die Schraubenkreisebene um den Winkel ϑ_1 in Richtung der Anströmgeschwindigkeit nach rückwärts neigt; da die Richtung der Drehachse unverändert bleibt, müssen also die Schraubenblätter eine entsprechende Schlagbewegung um ihre Schlaggelenke ausführen. In der neuen Schraubenkreisebene ist dann die Bedingung (1) erfüllt.

Bei der Anströmung der Schraube in ihrer Ebene tritt außerdem eine in dieser Ebene wirkende Kraft auf, die in die Richtung der Anströmung fällt (Seitenkraft R_n) und die die Größe

$$R_n = k_n F \frac{\varrho}{2} u^2 \tag{3}$$

hat, wobei die Seitenkraftziffer k_n aus

$$k_n = \sigma\,\mu\,\frac{c_w}{2} \tag{4}$$

zu berechnen ist.[5] Hierbei ist

$$\sigma = \frac{z\,t}{\pi\,R} \tag{5}$$

die Flächendichte des Rotors (Flügelzahl z, Flügeltiefe t, Schraubenradius R) und c_w der Widerstandsbeiwert des Flügelprofils, der hier mit einem Mittelwert über den in Frage kommenden Anstellwinkelbereich einzusetzen ist.

4. Kräfte und Momente am Flugzeug.

Wir zerlegen die Schwingungsbewegung des Flugzeuges in zwei Komponenten: Bewegung in der Längsebene und Bewegung in der Querebene. Die Bewegung in jeder dieser beiden Ebenen setzen wir zusammen aus einer horizontalen Verschiebung des Schwerpunktes und einer Drehung um den Schwerpunkt. Da der Schub der Schraube in erster Näherung konstant bleibt, kann eine vertikale Schwingungsbewegung nicht zustande kommen.

Wir bezeichnen die Verschiebungsgeschwindigkeit des Schwerpunktes in der Längsebene mit v_s (Abb. 1), den Drehwinkel um den Schwerpunkt mit α. Ebenso die Verschiebungsgeschwindigkeit des Schwerpunktes in der Querebene mit $\bar{v}_s$ und den Drehwinkel in dieser Ebene mit $\bar{\alpha}$. Alle auf die Querebene bezogenen Größen werden durch Überstreichen gekennzeichnet.

Bezüglich der Vorzeichenwahl setzen wir fest, daß alle Geschwindigkeiten und Kräfte das positive Vorzeichen erhalten, wenn sie in der Längsebene in Flugrichtung und in der Querebene nach links, in Flugrichtung gesehen, gerichtet sind.

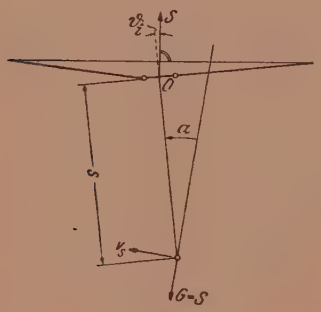

Abb. 1.

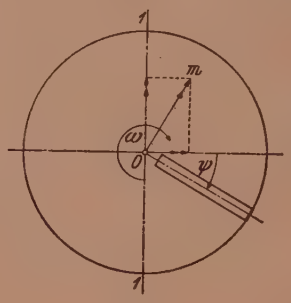

Abb. 2.

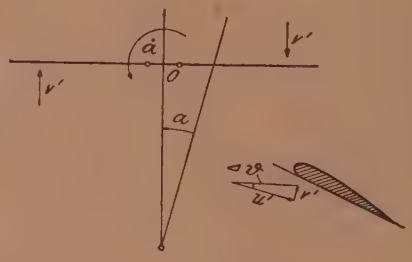

Abb. 3.

Der Abstand des Flugzeugschwerpunktes vom Rotormittelpunkt sei s. Wir erhalten dann für die resultierende Geschwindigkeit des Rotormittelpunktes

$$\left.\begin{aligned} &\text{in der Längsebene} && v = v_s + s\,\dot{\alpha}, \\ &\text{in der Querebene} && \bar{v} = \bar{v}_s + s\,\dot{\bar{\alpha}}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wobei $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung um den Schwerpunkt bezeichnet.

Wir denken uns nun das im Schwebezustand befindliche Flugzeug durch irgendeine äußere Störung (Böenangriff) aus seiner Gleichgewichtslage gebracht (Abb. 1) und untersuchen die dadurch entstehende Bewegung. In der nachstehenden Tab. 1 sind die auf das Flugzeug wirkenden Horizontalkräfte, in Tab. 2 die entsprechenden Momente um den Schwerpunkt zusammengestellt. Wir setzen hierbei voraus, daß der Momentenbeiwert c_m des Flügelprofils, bezogen auf den aerodynamischen Mittelpunkt, gleich Null ist, so daß Momente um die Blattlängsachse nicht entstehen.[4]

Zu den Tabellen ist im einzelnen folgendes zu bemerken:

Zu 3. Um die Rotorebene bei der Drehung um den Schwerpunkt in die neue Richtung zu drücken, ist ein aerodynamisches Moment zur Überwindung des Kreiselmomentes notwendig, welches durch eine Rückneigung ϑ_2 der Rotorebene aufgebracht wird. ϑ_2 ist unabhängig von der Flügelzahl, denn es gilt für jeden Flügel

$$2\,J_F\,\dot{\alpha}\,\omega\sin^2\psi = \int_0^R c_a'\,\vartheta_2\sin^2\psi\,\frac{\varrho}{2}\,\omega^2 r^2\,t\,r\cdot dr = c_a'\,\vartheta_2\,\omega^2\,\frac{\varrho}{2}\,\frac{R^4}{4}\,t\cdot\sin^2\psi. \qquad (7)$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit des Rotors, J_F das Massenträgheitsmoment eines

Flügels bezüglich des Rotormittelpunktes O. c_a' bedeutet den Auftriebsgradienten des Flügelprofils.

Die linke Seite der obigen Gleichung stellt das Kreiselmoment eines Flügels bei einer Drehung um die Achse 1 — 1 dar (Abb. 2). $J_F \sin^2\psi$ ist das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse. Die rechte Seite der Gleichung bedeutet die senkrecht 1 — 1 gerichtete Komponente des Momentenvektors $\mathfrak{M}$, ist also gleich $M \cdot \sin\psi$, wobei M aus der periodischen Anstellwinkeländerung $\vartheta_2 \cdot \sin\psi$ entsteht. Berechnet man das Integral der Komponente $M \cdot \cos\psi$ über eine Rotorumdrehung, so verschwindet dieses. Die Komponente liefert also keinen stationären Anteil.

Zu 5. Bei der Drehung um den Schwerpunkt dreht sich die Rotorebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ um O (Abb. 3). Die Blätter werden daher senkrecht zur

Tabelle 1. Kräfte in der Horizontalebene.

Längsebene	Querebene
1. Seitenkraft $R_n = -k_n F \frac{\varrho}{2} u^2$, wobei $k_n = \sigma \frac{v}{u} \frac{c_w}{2}$.	Keine Kopplung.
2. Schubkomponente $-S\vartheta_1$ zufolge Rückneigung durch Anblasung mit v, wobei $\vartheta_1 = 2\,\vartheta_0 \frac{v}{u}$.	Keine Kopplung.
3. Schubkomponente $-S\vartheta_2$ zufolge Kreiselwirkung, wobei $\vartheta_2 = \frac{16 J_F \dot{\alpha}}{c_a' \omega \varrho R^4 t}$.	Keine Kopplung.
4. Trägheitskraft $-\frac{G}{g}\dot{v}_s = -\frac{G}{g}(\dot{v} - s\ddot{\alpha})$.	Keine Kopplung.
5. Auftriebsänderung durch Drehen um den Schwerpunkt; ergibt Seitenneigung $\bar{\vartheta}_3$ der Rotorebene.	Schubkomponente $+S\bar{\vartheta}_3$, wobei $\bar{\vartheta}_3 = \frac{\dot{\alpha}}{\omega}$.
6. Schubkomponente $+S\alpha$.	Keine Kopplung.
7. Flügelträgheit; ergibt Seitenneigung $\bar{\vartheta}_4$ der Rotorebene.	Schubkomponente $+S\bar{\vartheta}_4$, wobei $\bar{\vartheta}_4 = \frac{8 J_F \ddot{\alpha}}{c_a' \omega^2 \varrho R^4 t}$.
8. Keine Kopplung.	Seitenkraft $\bar{R}_n = -\bar{k}_n F \frac{\varrho}{2} u^2$ mit $\bar{k}_n = \sigma \frac{\bar{v}}{u} \frac{c_w}{2}$.
9. Keine Kopplung.	Schubkomponente analog 2. $-S\bar{\vartheta}_5$, wobei $\bar{\vartheta}_5 = 2\,\vartheta_0 \frac{\bar{v}}{u}$.
10. Keine Kopplung.	Schubkomponente analog 3. $-S\bar{\vartheta}_6$, mit $\bar{\vartheta}_6 = \frac{16 J_F \dot{\bar{\alpha}}}{c_a' \omega \varrho R^4 t}$.
11. Keine Kopplung.	Trägheitskraft $-\frac{G}{g}(\dot{\bar{v}} - s\ddot{\bar{\alpha}})$.
12. Schubkomponente analog 5. $-S\vartheta_7$, wobei $\vartheta_7 = \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{\omega}$.	Auftriebsänderung durch Drehen um den Schwerpunkt.
13. Keine Kopplung.	Schubkomponente $+S\bar{\alpha}$ analog 6.
14. Schubkomponente analog 7. $-S\vartheta_8$, wobei $\vartheta_8 = \frac{8 J_F \ddot{\bar{\alpha}}}{c_a' \omega^2 \varrho R^4 t}$.	Einfluß der Flügelträgheit.

Tabelle 2. Momente um den Schwerpunkt.

Längsebene	Querebene
15. Moment der Seitenkraft 1. — $R_n s$.	
16. Moment der Schubkomponente 2. — $S \vartheta_1 s$.	
17. Moment der Schubkomponente 3. — $S \vartheta_2 s$.	
18. Moment der Trägheitskräfte — $J \ddot{\alpha}$.	
19.	Moment der Schubkomponente 5. + $S \bar{\vartheta}_3 s$.
20. Moment des Schraubenschubes: $M = 0$.	
21.	Moment der Schubkomponente 7. + $S \bar{\vartheta}_4 s$.
22.	Moment der Seitenkraft 8. — $\bar{R}_n s$.
23.	Moment der Schubkomponente 9. — $S \bar{\vartheta}_5 s$.
24.	Moment der Schubkomponente 10. — $S \bar{\vartheta}_6 s$.
25.	Moment der Trägheitskräfte — $\bar{J} \ddot{\bar{\alpha}}$.
26. Moment der Schubkomponente 12. — $S \vartheta_7 s$.	
27.	Moment des Schraubenschubes: $M = 0$.
28. Moment der Schubkomponente 14. — $S \vartheta_8 s$.	
29. Fliehkraftmoment $-z P_F \frac{a}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_7 + \vartheta_8)$.	
30.	Fliehkraftmoment $+z P_F \frac{a}{2} (\bar{\vartheta}_3 + \bar{\vartheta}_4 - \bar{\vartheta}_5 - \bar{\vartheta}_6)$.

Die Massenträgheitsmomente J um die Querachse und $\bar{J}$ um die Längsachse sind ohne Rotormasse zu nehmen!

Rotorebene mit der Geschwindigkeit $v' = r \dot{\alpha} \cos \psi$ angeströmt. Damit ändert sich der Blattanstellwinkel um $\Delta\vartheta$, wobei

$$\Delta\vartheta \doteq \operatorname{tg} \Delta\vartheta = \frac{v'}{u'} = -\frac{\dot{\alpha} r}{\omega r} \cos \psi$$

ist und es entsteht ein Moment

$$M = \int_0^R c_a' \Delta\vartheta \frac{\varrho}{2} \omega^2 r^2 t \, r \, dr = c_a' \dot{\alpha} \omega \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{R^4}{4} t \cdot \cos \psi$$

pro Flügel. Diesem Moment wird durch die Seitenneigung $\bar{\vartheta}_3$ das Gleichgewicht gehalten:

$$c_a' \dot{\alpha} \omega \frac{\varrho}{2} \frac{R^4}{4} \cdot t \cdot \cos \psi = c_a' \bar{\vartheta}_3 \omega^2 \frac{\varrho}{2} \frac{R^4}{4} t \cdot \cos \psi.$$

$$\bar{\vartheta}_3 = \frac{\dot{\alpha}}{\omega}. \tag{8}$$

$\bar{\vartheta}_3$ ist unabhängig von der Flügelzahl.

Wenn ω im Uhrzeigersinn, von oben gesehen, dreht, so wirkt die Schubkomponente $S \bar{\vartheta}_3$ in der Querebene nach links, wenn $\dot{\alpha}$ positiv ist, erhält also positives Vorzeichen.

Zu 7. Bei der Drehbeschleunigung $\ddot{\alpha}$ entsteht durch die Flügelträgheit ein Moment, welchem wiederum durch eine Seitenneigung $\bar{\vartheta}_4$ das Gleichgewicht gehalten wird:

$$M = J_F \ddot{\alpha} \cos \psi = c_a' \bar{\vartheta}_4 \omega^2 \frac{\varrho}{2} \frac{R^4}{4} t \cdot \cos \psi. \tag{9}$$

Ist die Winkelbeschleunigung positiv, so wirkt die Schubkomponente $S \bar{\vartheta}_4$ nach links, erhält also positives Vorzeichen.

Zu 29. Wenn die Schlaggelenke exzentrisch liegen (Abstand $2a$), entsteht bei

einer Neigung der Rotorebene gegenüber der Rotorachse durch die Fliehkraft P_F der Rotorblätter ein Moment. Es ist z. B. in der Längsebene bei einer Rückneigung ϑ_i des Rotors (vgl. Abb. 4) je Flügel:

$$M = P_F \cos\psi\, a \sin\vartheta_i \cos\psi \approx P_F\, a\, \vartheta_i \cos^2\psi =$$
$$= P_F\, a\, \vartheta_i \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\psi}{2}\right).$$

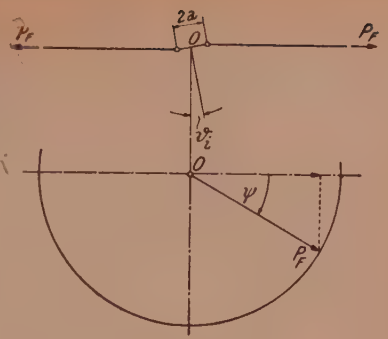

Abb. 4.

Der stationäre Anteil dieses Momentes beträgt daher für z Flügel

$$M_{ges} = z \cdot P_F \frac{a\,\vartheta_i}{2}. \qquad (10)$$

5. Die Frequenzgleichung.

Die vier Bewegungsgleichungen für Verschieben in der Längs- und Querebene und für Drehen um den Schwerpunkt in diesen beiden Ebenen lauten

$$\left.\begin{aligned}
&-k_n F \frac{\varrho}{2} u^2 - S\,\vartheta_1 - S\,\vartheta_2 - \frac{G}{g}(\dot v - s\,\ddot\alpha) + S\,\alpha - S\,\vartheta_7 - S\,\vartheta_8 = 0,\\
&-\bar k_n F \frac{\varrho}{2} u^2 - S\,\bar\vartheta_5 - S\,\bar\vartheta_6 - \frac{G}{g}(\dot{\bar v} - s\,\ddot{\bar\alpha}) + S\,\bar\alpha + S\,\bar\vartheta_3 + S\,\bar\vartheta_4 = 0,\\
&-k_n F \frac{\varrho}{2} u^2 s - S\,\vartheta_1 s - S\,\vartheta_2 s - J\,\ddot\alpha - S\,\vartheta_7 s - S\,\vartheta_8 s -\\
&\qquad - z\,P_F \frac{a}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_7 + \vartheta_8) = 0,\\
&-\bar k_n F \frac{\varrho}{2} u^2 s - S\,\bar\vartheta_5 s - S\,\bar\vartheta_6 s - \bar J\,\ddot{\bar\alpha} + S\,\bar\vartheta_3 s + S\,\bar\vartheta_4 s +\\
&\qquad + z\,P_F \frac{a}{2}(\bar\vartheta_3 + \bar\vartheta_4 - \bar\vartheta_5 - \bar\vartheta_6) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\frac{8\,J_F}{c_a'\,\omega^2\,\varrho\,R^4\,t} &= A, & \frac{\sigma\,c_w}{2\,u\,k_s} + 2\,\frac{\vartheta_0}{u} &= B,\\
B + \frac{z\,P_F}{s\,G}\,a\,\frac{\vartheta_0}{u} &= C, & 1 + \frac{z\,P_F}{s\,G}\cdot\frac{a}{2} &= c
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

und erhalten damit aus (11) das nachstehende homogene, lineare System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{g}\dot v + B\,v - \frac{s}{g}\ddot\alpha + 2\,\omega\,A\,\dot\alpha - \alpha + A\,\dddot\alpha + \frac{1}{\omega}\ddot\alpha = 0,\\
&\frac{1}{g}\dot{\bar v} + B\,\bar v - \frac{s}{g}\dddot{\bar\alpha} + 2\,\omega\,A\,\ddot{\bar\alpha} - \bar\alpha - A\,\ddot{\bar\alpha} - \frac{1}{\omega}\dot{\bar\alpha} = 0,\\
&C\,v + \frac{J}{s\,G}\ddot\alpha + 2\,\omega\,c\,A\,\dot\alpha + c\,A\,\dddot\alpha + \frac{1}{\omega}\,c\,\ddot\alpha = 0,\\
&C\,\bar v + \frac{J}{s\,G}\dddot{\bar\alpha} + 2\,\omega\,c\,A\,\ddot{\bar\alpha} - c\,A\,\ddot{\bar\alpha} - \frac{1}{\omega}\,c\,\dot{\bar\alpha} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$x = x_0\, e^{\lambda t} \qquad (x = v,\ \bar v,\ \alpha,\ \bar\alpha) \qquad (14)$$

erhalten wir ein System von vier linearen, homogenen Gleichungen in den x_0, welches nur dann eine von der trivialen Lösung verschiedene Lösung besitzt, wenn die Systemdeterminante verschwindet. Diese Bedingung liefert eine Gleichung sechsten Grades in λ, die Frequenzgleichung. Sie hat die Form

$$a_0\,\lambda^6 + a_1\,\lambda^5 + a_2\,\lambda^4 + a_3\,\lambda^3 + a_4\,\lambda^2 + a_5\,\lambda + a_6 = 0 \qquad (15)$$

und ihre Koeffizienten lauten

$$
\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{C^2 g^2}\left(A^2 + \frac{J\bar{J}}{G^2 s^2}\right),\\
a_1 &= 2c\frac{A^2}{Cg}\left(c\frac{B}{C} - 1\right) + \frac{1}{Cg^2}\cdot\frac{J+\bar{J}}{Gs}\left(s + 2\omega c\frac{A}{C}\right) + \frac{2}{C^2 g}\left(B\frac{J\bar{J}}{G^2 s^2} + \frac{A}{\omega}\cdot\frac{c^2}{g}\right),\\
a_2 &= A^2\left(c\frac{B}{C} - 1\right)^2 + 4A\left(c\frac{B}{C} - 1\right)\frac{c}{\omega C g} + \left(\frac{c}{\omega C g}\right)^2 + \frac{1}{g^2}\left(s + 2\omega c\frac{A}{C}\right)^2 +\\
&\quad + \frac{1}{Cg}\cdot\frac{J+\bar{J}}{Gs}\left[sB + 2\omega A\left(2c\frac{B}{C} - 1\right)\right] + \frac{J\bar{J}}{G^2 s^2},\\
a_3 &= \frac{2}{g}\left[2\omega A\left(s + 2\omega c\frac{A}{C}\right) - \left(\frac{1}{\omega}\right)^2\frac{c}{C}\right]\left(c\frac{B}{C} - 1\right) + 2\frac{A}{\omega}\left(c\frac{B}{C} - 1\right)^2 +\\
&\quad + \frac{1}{C}\cdot\frac{J+\bar{J}}{Gs}\left[\frac{1}{g} + 2\omega A B\left(c\frac{B}{C} - 1\right)\right],\\
a_4 &= \left[4\omega^2 A^2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)^2\right]\left(c\frac{B}{C} - 1\right)^2 + \frac{2}{g}\left(s + 2\omega c\frac{A}{C}\right) + \frac{J+\bar{J}}{Gs}\cdot\frac{B}{C},\\
a_5 &= 4\omega A\left(c\frac{B}{C} - 1\right),\\
a_6 &= 1.
\end{aligned}\right\} \quad (16)
$$

Die Frequenzgleichung besitzt, wie eine zahlenmäßige Durchrechnung zeigt, für die in Frage kommenden Werte ihrer Koeffizienten drei Paare konjugiert komplexer Wurzeln. Um Stabilität, also abklingende Schwingungen, zu gewährleisten, müßten die Realteile dieser Wurzeln negativ sein, die Beiwerte der Frequenzgleichung also den Hurwitzschen Bedingungen genügen.

H. Bilharz[6] hat eine einfache graphische Methode angegeben, um für Gleichungen fünften und sechsten Grades das Erfülltsein dieser Bedingungen zu überprüfen. Die Durchrechnung ausgeführter Hubschrauber ergibt nun, daß Gl. (15) keineswegs eine Hurwitzsche Gleichung ist, sondern daß stets eine der drei möglichen Schwingungsformen instabil ist.

Die Berechnung der Schwingungsdauer dieser instabilen Schwingung ist nun vor allem nötig, wenn man sich darüber Klarheit verschaffen will, inwieweit die Instabilität die Flugeigenschaften beeinträchtigt bzw. inwieweit sie durch Gegensteuern vom Piloten ausgeglichen werden kann. Hierzu hätte man die Gl. (15) zu lösen (z. B. nach dem Graeffeschen Verfahren), was mit einem sehr erheblichen Arbeitsaufwand verknüpft ist. Es sollen daher nachstehend aus den Gl. (15) und (16) Näherungsausdrücke abgeleitet werden, welche die Berechnung der instabilen Schwingung in einfacher Weise ermöglichen.

6. Näherungsformeln.

Wir gehen hierzu von den Beziehungen aus, die zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihren Koeffizienten bestehen. Diese Beziehungen lauten unter Bezugnahme auf Gl. (15)

$$
\left.\begin{aligned}
\sum \lambda_i &= -\frac{a_1}{a_0},\\
\sum \lambda_i \lambda_k &= +\frac{a_2}{a_0},\\
\sum \lambda_i \lambda_k \lambda_r &= -\frac{a_3}{a_0},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6 &= +\frac{a_6}{a_0},
\end{aligned}\right\} \quad (17)
$$

wobei die Kombinationen unter den Summenzeichen ohne Wiederholung zu bilden sind. Bezeichnen wir nun die drei Paare konjugiert komplexer Wurzeln mit

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= u_1 \pm i\, v_1, \\ \lambda_{3,4} &= u_3 \pm i\, v_3, \\ \lambda_{5,6} &= u_5 \pm i\, v_5, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

so zeigt die numerische Durchrechnung unter Annahme praktisch in Frage kommender Werte der Koeffizienten, daß stets eines der drei Wurzelpaare dem Betrag nach ungleich größer ist als die übrigen. Es sei dies $\lambda_{1,2}$; dann gilt

$$u_1 \gg u_3 \quad \text{bzw.} \quad u_1 \gg u_5,$$
$$u_1^2 + v_1^2 \gg u_3^2 + v_3^2 \quad \text{bzw.} \quad u_1^2 + v_1^2 \gg u_5^2 + v_5^2.$$

Berücksichtigen wir dies, indem wir in den Gl. (17) die entsprechenden Glieder vernachlässigen, so erhalten wir die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} &2\,u_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad u_1^2 + v_1^2 = +\frac{a_2}{a_0}, \\ &(u_1^2 + v_1^2)\,(2\,u_3 + 2\,u_5) = -\frac{a_3}{a_0}, \\ &(u_1^2 + v_1^2)\,(v_3^2 + v_5^2) = +\frac{a_4}{a_0}, \\ &(u_1^2 + v_1^2)\,[(u_3^2 + v_3^2)\,2\,u_5 + (u_5^2 + v_5^2)\,2\,u_3] = -\frac{a_5}{a_0}, \\ &(u_1^2 + v_1^2)\,(u_3^2 + v_3^2)\,(u_5^2 + v_5^2) = +\frac{a_6}{a_0}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen lassen sich u_1 und v_1 unmittelbar berechnen. Die übrigen liefern

$$\left.\begin{aligned} &(u_3^2 + v_3^2)\,(u_5^2 + v_5^2) = \frac{a_6}{a_2}, \qquad && u_3 + u_5 = -\frac{a_3}{2\,a_2}, \\ &(u_3^2 + v_3^2)\,u_5 + (u_5^2 + v_5^2)\,u_3 = -\frac{a_5}{2\,a_2}, && v_3^2 + v_5^2 = \frac{a_4}{a_2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die Koeffizienten der Frequenzgleichung sind mit Ausnahme von a_5 immer positiv; a_5 kann (bei negativer Exzentrizität der Schlaggelenke) auch negativ werden. Da, wie schon früher erwähnt, einer der beiden Werte u_3 und u_5 stets positiv ist (instabile Schwingung), muß der zweite Wert stets negativ sein (stabile Schwingung). Wir bezeichnen den positiven Wert mit u_3, den negativen mit u_5 und eliminieren aus den Gl. (20) die Größen u_5 und v_5. Wir erhalten, wenn wir noch zur Abkürzung

$$u_3^2 + v_3^2 = w \tag{21}$$

setzen, die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &2\,u_3\,(a_2\,w^2 - a_6) = a_5\,w - a_3\,w^2, \\ &8\,a_2^2\,w\,u_3^2 + 4\,a_2\,a_3\,w\,u_3 + (4\,a_2\,a_4 + a_3^2)\,w - 4\,a_2^2\,w^2 - 4\,a_2\,a_6 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

In der zweiten der Gl. (21) können wir noch a_3^2 gegenüber $4\,a_2\,a_4$ vernachlässigen. Dies ist bei den in Betracht kommenden Zahlenwerten durchaus zulässig. Damit ergeben sich schließlich die gesuchten Näherungsformeln für die instabile Schwingung

$$u_3 = \frac{a_3\,w^2 - a_5\,w}{2\,(a_6 - a_2\,w^2)}. \tag{23}$$

$$u_3 = \frac{-a_3\,w + \sqrt{a_3^2\,w^2 + 8\,a_2\,w\,(a_6 + a_2\,w^2 - a_4\,w)}}{4\,a_2\,w}. \tag{24}$$

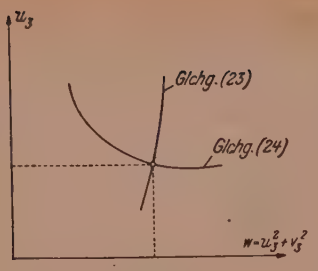

Abb. 5.

Die beiden Gleichungen löst man am besten graphisch, indem man die beiden, diesen Gleichungen entsprechenden Kurven für positive Werte von u_3 und w zeichnet und ihren Schnittpunkt bestimmt. Abb. 5 zeigt den prinzipiellen Verlauf dieser Kurven.

Aus u_3 und v_3 folgt dann die Schwingungsdauer T zu $T = \frac{2\pi}{v_3}$. Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Schwingungsamplituden („Aufschaukelungsfaktor") ist $e^{u_3 T}$.

7. Zusammenfassung.

Für den Hubschrauber mit einem Rotor wird die Stabilität im Schwebeflug untersucht. Aus der sich als Gleichung sechsten Grades ergebenden Frequenzgleichung folgt, daß drei verschiedene Schwingungsformen möglich sind, von denen eine stets instabil ist. Für diese Schwingung werden einfache Näherungsformeln abgeleitet, welche eine rasche Ermittlung der Schwingungsdauer und des Aufschaukelungsfaktors ermöglichen.

Literatur:

[1] B. v. Schlippe u. R. Dietrich: Zur Stabilität der Hubschrauber. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, H. 16. München u. Berlin 1940. — [2] Th. v. Kármán: Theoretische Bemerkungen zur Frage des Schraubenfliegers. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 345 (1921). — [3] H. G. Küssner: Probleme des Hubschraubers. Jb. 1937 dtsch. Luftf.-Forschg. I, S. 241. — [4] K. Hohenemser: Über die dynamische Stabilität des Hubschraubers mit angelenkten Flügeln. Ing.-Arch. 9, 419 (1938). — [5] K. Hohenemser: Zur Frage der Flugleistungen von Drehflüglern. Ing.-Arch. 8, 433 (1937). — [6] H. Bilharz: Geometrische Darstellung eines Satzes von Hurwitz für Frequenzgleichungen fünften und sechsten Grades. Z. angew. Math. Mech. 21, 96 (1941).

(Eingegangen am 22. November 1945.)

Der freie Rand an rechteckigen Platten.

Von **W. Dworzak**, Wien.

Mit 8 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Die Entwicklung geschlossener analytischer Ausdrücke für den Singularteil der Einflußfelder[1] hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Solange der Aufpunkt eines Einflußfeldes im Innern des Plattenbereiches liegt, kann der die klassische Singularität ergänzende Regularteil durch gut konvergierende Reihen dargestellt werden. Rückt jedoch der Aufpunkt an einen Plattenrand, so entartet die Singularität des Einflußfeldes und die klassische Form der Singularität ist nicht mehr maßgebend. Die Singularität nimmt in Abhängigkeit von den Randbedingungen besondere Formen an. Die entarteten Singularitäten des eingespannten und des frei drehbaren Plattenrandes sind bereits bekannt.[2] Hingegen ist der freie Plattenrand noch keiner entsprechenden Betrachtung unterzogen worden.

Bisher wurde das Problem der Platte mit freien Rändern von Ohlig[3] bearbeitet, der die Differentialgleichung für die Durchbiegung einer Platte durch Reihenansätze integriert. Diese werden bei Einzellasten in der Nähe des Aufpunktes divergent. Um eine Konvergenz der Reihen herbeizuführen, ersetzt Ohlig die Einzellast durch

eine kurze Linienlast. Die Lösung kann daher nur in einiger Entfernung vom Aufpunkt gute Ergebnisse bringen. Eine weitere Arbeit über das Problem wurde von Olsen und Reinitzhuber[4] angekündigt. Die Verfasser bedienen sich ebenfalls der Reihenansätze.

Mit reinen Reihenansätzen ist es jedoch nicht möglich, den Charakter der am freien Rand entarteten Singularitäten in der Umgebung des Aufpunktes zu erkennen. Aufklärung hierüber kann nur eine Lösung in geschlossener Form bringen.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, die entarteten Singularitäten am freien Plattenrand für das Biegungsmoment und die Querkraft darzustellen und der Ermittlung von Einflußfeldern dienstbar zu machen.

Während der letzten Jahre sind bei den Reichsautobahnen wiederholt Plattenbrücken, und zwar mit erheblichen Abmessungen gebaut worden. Solche Plattenbrücken sind theoretisch als Rechteckplatten mit zwei gegenüberliegenden freien Rändern anzusehen. Die Einflußfelder solcher Platten gewinnen daher auch praktisches Interesse. Am Schluß der Arbeit wird der Weg zur Berechnung dieser Einflußfelder und die Ausdrücke für einige wichtige Fälle angegeben.

2. Die Biegefläche infolge einer am freien Plattenrand angreifenden Einzellast.

Die von einer an einer freien Begrenzungsgeraden einer Platte angreifenden Einzellast $P = 1$ erzeugte Biegefläche ist ein Integral der Differentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$, das im Angriffspunkt der Kraft eine singuläre Stelle hat. Der Singularteil ist eine Entartung der klassischen Singularität $K_0 = \frac{1}{8\pi N} r^2 \ln \frac{r}{h}$ und wird mit K_0^{III} symbolisiert.[5] Nádai[6] gibt einen analytischen Ausdruck für diese Biegefläche an:

$$K_0^{\mathrm{III}} = \frac{r^2}{2(3+\nu)\pi N}\left[\ln\frac{r}{h} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\varphi \sin 2\varphi - \cos 2\varphi \ln\frac{r}{h}\right) + \frac{1}{1+\nu}\right]. \quad (2,\,1)$$

r = Fahrstrahl vom Aufpunkt (u) zum Punkt (x, y), h = Längeneinheit, ν = Querdehnungszahl, $N = \frac{E d^3}{12(1-\nu^2)}$ = Plattensteifigkeit.

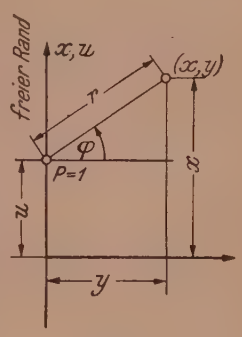

Abb. 1.

In (2, 1) ist, wie in der Plattentheorie üblich, vorausgesetzt: Der Baustoff sei homogen und isotrop, das Hooksche Gesetz gültig, die Plattenstärke klein gegenüber den anderen Abmessungen und die Durchbiegung klein gegenüber der Plattenstärke. In den folgenden Überlegungen wird ferner die Querdehnung vernachlässigt ($\nu = 0$). Bei allseitig gelagerten Platten ist diese Vereinfachung unbedenklich, da die Randbedingungen bei lotrecht festgehaltenen Rändern von der Querdehnung unabhängig sind und der Einfluß von ν immer noch nachträglich berücksichtigt werden kann. Ein freier Plattenrand bedingt neben verschwindender Querkraft auch das Verschwinden des Biegungsmoments, dessen Größe jedoch von ν beeinflußt wird. Da aber die Querdehnungszahl ν des Betons klein und ein mit der Betonzusammensetzung veränderlicher Wert ist, wird $\nu = 0$ vorausgesetzt.

Mit

$$\nu = 0 \quad \text{und} \quad r = \sqrt{(x-u)^2 + y^2}$$

lautet (2, 1) in kartesischen Koordinaten:

$$K_0^{\mathrm{III}} = \frac{1}{6\pi N}\left[(x-u)^2 \ln\frac{(x-u)^2+y^2}{h^2} + 2(x-u)\,y \operatorname{arc\,tg}\frac{x-u}{y} + (x-u)^2 + y^2\right]. \quad (2,\,1\,\mathrm{a})$$

In dieser Form kann K_0^{III}, um die höheren Singularitäten zu erhalten, nach den Koordinaten des Aufpunktes differenziert werden. Da der Aufpunkt voraussetzungsgemäß am freien Plattenrand $y = 0$ liegt, ist seine Lage im Bereich der Platte nur mit u veränderlich. Es kann daher (2, 1a) in der Richtung senkrecht zum freien Rand nicht nach der Koordinate des Aufpunktes differenziert werden. Diese Differentiation

kann jedoch entbehrt werden, da die höheren Singularitäten für Biegungsmoment und Querkraft senkrecht zum freien Plattenrand entsprechend den Randbedingungen im ganzen Bereich identisch verschwinden müssen.

3. Die höheren Singularitäten von $\Delta\Delta w = 0$ am freien Plattenrand.

Durch mehrmalige Differentiation erhält man aus der primären Singularität (2, 1a) die Singularität für die Verdrehung

$$\frac{\partial K_0^{III}}{\partial u} = -\frac{1}{3\pi N}\left[(x-u)\ln\frac{(x-u)^2+y^2}{h^2} + 2(x-u) + y\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x-u}{y}\right], \qquad (3, 2)$$

für die Krümmung (das $-1/N$-fache Biegungsmoment)

$$\frac{\partial^2 K_0^{III}}{\partial u^2} = \frac{1}{3\pi N}\left[\ln\frac{(x-u)^2+y^2}{h^2} - \frac{(x-u)^2}{(x-u)^2+y^2} + 3\right]. \qquad (3, 3)$$

Wegen $\frac{\partial^2 K_0^{III}}{\partial v^2} = 0$ wird $\Delta K_0^{III} \equiv \frac{\partial^2 K_0^{III}}{\partial u^2}$.

Die Singularität für die Querkraft wird

$$-N\frac{\partial \Delta K_0^{III}}{\partial u} = \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{(x-u)\,[(x-u)^2+2y^2]}{[(x-u)^2+y^2]^2}. \qquad (3, 4)$$

Zur Untersuchung dieser Singularitäten empfiehlt es sich, nach der Differentiation wieder Polarkoordinaten einzuführen.

$$\frac{\partial K_0^{III}}{\partial u} = -\frac{2}{3\pi N} r\left[\left(1+\ln\frac{r}{h}\right)\cdot\sin\varphi + \varphi\cdot\cos\varphi\right]. \qquad (3, 2a)$$

$$\frac{\partial^2 K_0^{III}}{\partial u^2} = \Delta K_0^{III} = \frac{1}{3\pi N}\left(2\ln\frac{r}{h} + \sin^2\varphi + 3\right). \qquad (3, 3a)$$

$$-N\frac{\partial \Delta K_0^{III}}{\partial u} = \frac{2}{3\pi}\frac{\sin\varphi}{r}(1+\cos^2\varphi). \qquad (3, 4a)$$

a) Krümmung bzw. $-1/N$-faches Biegungsmoment.

$$\frac{\partial^2 K_0^{III}}{\partial u^2} = \frac{1}{3\pi N}\cdot\left(2\ln\frac{r}{h} + \sin^2\varphi + 3\right).$$

Die Darstellung in Polarkoordinaten gibt Aufschluß über die Gestalt eines Horizontalschnittes der Singularität, die man sich sehr anschaulich als doppelt gekrümmte Fläche vorstellt. Ein solcher, im Abstand k von der Bezugsebene liegender Schnitt folgt der Gleichung

$$r = h\cdot e^{\frac{3}{2}(\pi N k - 1)}\cdot e^{-\frac{\sin^2\varphi}{2}}. \qquad (3, 5)$$

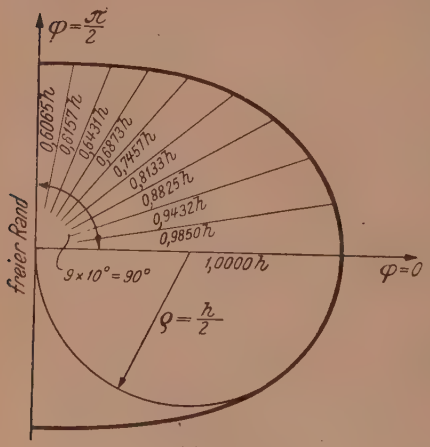

Abb. 2.

Demnach sind alle Horizontalschnitte ähnliche Kurven von der Form

$$r = C\cdot e^{-\frac{\sin^2\varphi}{2}} \quad \text{mit} \quad C = f(k) = h\cdot e^{\frac{3}{2}(\pi N - 1)}.$$

Für den in Abb. 2 dargestellten Horizontalschnitt $k = \frac{1}{\pi N}$ gilt $r = h\,e^{-\frac{\sin^2\varphi}{2}}$. Mit der bekannten Formel

$$\varrho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

wird bei $\varphi = 0$ der Krümmungsradius $\varrho = \frac{h}{2}$, bei $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ hingegen wird $\varrho = \infty$; die Horizontalschnitte laufen am freien Plattenrand mit verschwindender Krümmung an. Der Flächeninhalt eines Horizontalschnittes ist

$$F(k) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot d\varphi = \frac{h^2}{2} e^{3(\pi N k - 1)} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2\varphi} \cdot d\varphi.$$

Mit genügender Genauigkeit wird

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2\varphi} \cdot d\varphi = 2{,}025.$$

Die Berechnung des Integrals erfolgt numerisch.

Während die Singularität im Aufpunkte gegen $-\infty$ geht, bleibt der Inhalt des unter dem Horizontalschnitt k liegenden Körpers endlich

$$V(k) = \int_{-\infty}^{k} F(k)\, dk = \frac{2{,}025}{2\, e^3} h^2 \int_{-\infty}^{k} e^{3\pi N k} \cdot dk = 0{,}005349 \frac{e^{3\pi N k}}{N} \cdot h^2. \qquad (3, 6)$$

Bei Vernachlässigung der Querdehnung ($\nu = 0$) wird das Biegungsmoment gleich der $(-N)$-fachen Krümmung. Daher ist, um (3, 6) auf die Momenteneinflußfelder anwenden zu können, für $N \cdot k = -\varkappa$ zu setzen.

$$V(\varkappa) = 0{,}005349\, e^{-3\pi\varkappa} \cdot h^2.$$

b) Querkraft. Nach (3, 4a) ist

$$-N \frac{\partial \Delta K_0^{III}}{\partial u} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r} (1 + \cos^2\varphi).$$

Die Höhenlinien im Abstand $\varkappa = -N \cdot k$ von der Bezugsebene folgen der Gleichung

$$r = \frac{2}{3\pi\varkappa} \cdot \sin\varphi\,(1 + \cos^2\varphi).$$

Abb. 3 zeigt die Höhenlinie $\varkappa = +\frac{2}{3\pi h}$. Die Höhenlinie $\varkappa = -\frac{2}{3\pi h}$ ist in bezug auf die Achse $\varphi = 0$ dazu symmetrisch.

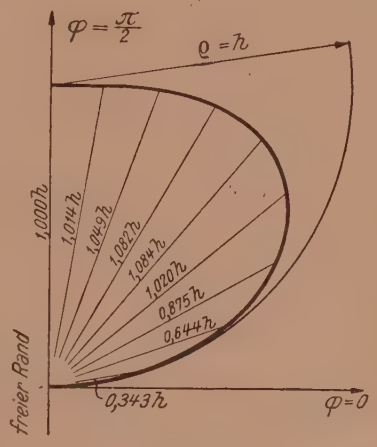

Abb. 3.

Im Aufpunkte wird der Krümmungsradius ϱ der Schichtenlinie gleich h und bei $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ ist $\varrho = \infty$. Die Krümmung des Horizontalschnittes verschwindet am freien Rand ebenfalls.

Der Flächeninhalt eines Horizontalschnittes wird

$$F(\varkappa) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi, \varkappa)\, d\varphi = \frac{2}{9\pi^2\varkappa^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,(1 + \cos^2\varphi)^2\, d\varphi = 0{,}01437\, \frac{1}{\varkappa^2}.$$

Der Inhalt des über einem Horizontalschnitt liegenden unendlich langen Schlauches ist wieder endlich

$$V(\varkappa) = \int_{\varkappa}^{\infty} F(\varkappa)\, d\varkappa = 0{,}01437 \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{d\varkappa}{\varkappa^2} = 0{,}01437\, \frac{1}{\varkappa}. \qquad (3, 7)$$

Mit Kenntnis der entarteten Singularitäten für Biegungsmoment und Querkraft (3, 3) bzw. (3, 4) können die Einflußfelder von Platten mit mindestens einem freien Rand unmittelbar berechnet werden, indem der Singularteil durch ein reguläres

Integral von $\Delta\Delta w = 0$ ergänzt wird, so daß sämtliche Randbedingungen der Platte erfüllt sind. Der Rechenaufwand ist hierbei verhältnismäßig groß, da durch den Regularteil die Randbedingungen entlang mehrerer Ränder befriedigt werden müssen. A. Pucher[7] zeigt die großen Vorteile, die die Verwendung von modifizierten Singularitäten zur Berechnung von Einflußfeldern mit sich bringen. Modifizierte Singularitäten sind solche Ausdrücke, die neben der klassischen Singularität, die für die Umgebung des Aufpunktes allein charakteristisch ist, ein reguläres Integral von $\Delta\Delta w = 0$ enthalten und damit geforderte Randbedingungen schon teilweise erfüllen. Gelingt es, eine modifizierte Singularität zu finden, die den Randbedingungen des gesuchten Einflußfeldes schon an mehreren Rändern genügt, so ist es einleuchtend, daß sich dann die Berechnung des Regularteiles wesentlich einfacher gestaltet. Es werden im folgenden modifizierte Singularitäten für den Plattenhalbstreifen mit dem Aufpunkt am freien Rand desselben entwickelt.

4. Die höheren Singularitäten von $\Delta\Delta w = 0$ am Plattenhalbstreifen.

a) Der Halbstreifen mit einem freien Rand, allgemeine Lösung.

Die Durchbiegung w eines Halbstreifens unter einer gegebenen Belastung setzt sich aus einem partikulären Integral w_0 der inhomogenen Differentialgleichung $\Delta\Delta w = \frac{p(x,y)}{N}$ und einem regulären Integral $\bar{w}$ der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ zusammen. Die Differenz $w_0 - \bar{w}$ muß die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllen. Ist w_0 gleich der Durchbiegung des unendlich langen Plattenstreifens, dann brauchen durch Hinzufügen von $\bar{w}$ nur Biegungsmoment und Querkraft längs des freien Randes des Halbstreifens zum Verschwinden gebracht werden.

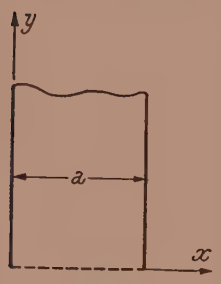

Abb. 4.

Mit den dimensionslosen Koordinaten $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$ schreibt man das reguläre Integral als eine Summe an,

$$\bar{w} = \sum_n \sin n\pi\xi\,(A_n + B_n\, n\pi\eta)\, e^{-n\pi\eta}, \qquad (4,1)$$

die die Navierschen Randbedingungen längs der Ränder $\xi = 0$ und $\xi = 1$ erfüllt und zwei Freiwerte (A_n, B_n) enthält. Da längs des freien Randes Biegungsmoment und Querkraft verschwinden, stehen zur Erfüllung der Randbedingungen entlang $y = 0$ in $\bar{w}$ diese zwei Freiwerte zur Verfügung. Bei Vernachlässigung der Querdehnung $(\nu = 0)$ gilt entlang des Randes $y = 0$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = 0 \text{ und } \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y}\right) - \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + 2\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y}\right) = 0. \qquad (4,2)$$

Die Randwerte w_0 in entwickelter Form seien bekannt

$$\left.\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \sum_n g_n \sin n\pi\xi, \quad \left.\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right|_{y=0} = \sum_n h_n \cdot \sin n\pi\xi. \qquad (4,3)$$

Hiermit ergeben sich in (4, 2) für jedes n zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten A_n und B_n, die daraus eindeutig berechnet werden können.

$$\left.\begin{aligned} \frac{n^2\pi^2}{a^2}(A_n - 2B_n) - g_n = 0, \\ \frac{n^3\pi^3}{a^3}(A_n + B_n) - h_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4,4)$$

Demnach wird

$$\left.\begin{aligned} A_n = \frac{a^2}{3n^2\pi^2}\left(g_n + \frac{a}{n\pi}2h_n\right), \\ B_n = \frac{a^2}{3n^2\pi^2}\left(-g_n + \frac{a}{n\pi}h_n\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4,5)$$

b) Die Singularität für das Randmoment am Halbstreifen.

Unter Verwendung der im Abschnitt a) gezeigten allgemeinen Lösung erhält man die Randmomentensingularität am Plattenhalbstreifen, wenn man an Stelle von w_0 die modifizierte Singularität $-N\frac{\partial^2 K_0^{IV}}{\partial u^2}$ für das Biegungsmoment m_x am Plattenstreifen[8] setzt, diese entsprechend den Randbedingungen des Halbstreifens durch ein reguläres Integral $\bar{w}$ ergänzt und sodann den Aufpunkt an den Rand wandern läßt ($\varepsilon \to 0$).

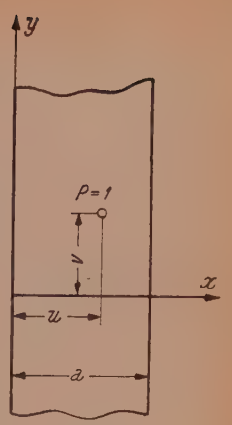

Abb. 5.

Mit den dimensionslosen Koordinaten $\delta = \frac{u}{a}$, $\varepsilon = \frac{v}{a}$ wird

$$-N\frac{\partial^2 K_0^{IV}}{\partial u^2} = \frac{1}{2\pi}\sum_n{}' \frac{\sin n\pi\delta}{n}\left[1 \pm n\pi(\eta-\varepsilon)\right] e^{\mp n\pi(\eta-\varepsilon)} \cdot \sin n\pi\xi. \tag{4, 6}$$

Die Vorzeichen gelten für $y \gtrless v$. Die x-Achse ($y = 0$) bildet den freien Rand des Halbstreifens, daher $y < v$. Die Differentiation von (4, 6) gibt die Randwerte

$$\left.\begin{aligned} -N\frac{\partial^3}{\partial y^3}\cdot\frac{\partial^2 K_0^{IV}}{\partial u^2}\Big|_{y=0} &= -\frac{\pi}{2a^2}\sum_n{}' n\cdot\sin n\pi\delta\,(1-n\pi\varepsilon)\,e^{-n\pi\varepsilon}\cdot\sin n\pi\xi = \\ &= \sum_n g_n \sin n\pi\xi, \\ -N\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3}\cdot\frac{\partial^2 K_0^{IV}}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\cdot\frac{\partial^2 K_0^{IV}}{\partial u^2}\right)\Big|_{y=0} &= \\ = -\frac{\pi^2}{2a^3}\sum_n{}' n^2\sin n\pi\delta\,(2+n\pi\varepsilon)\,e^{-n\pi\varepsilon}\cdot\sin n\pi\xi &= \sum_n h_n \sin n\pi\xi. \end{aligned}\right\} \tag{4, 7}$$

Die Werte von (4, 7) bringen, in (4, 5) eingesetzt,

$$A_n = -\frac{1}{6\pi}\cdot\frac{\sin n\pi\delta}{n}(5+n\pi\varepsilon)\,e^{-n\pi\varepsilon},$$

$$B_n = -\frac{1}{6\pi}\cdot\frac{\sin n\pi\delta}{n}(1+2n\pi\varepsilon)\,e^{-n\pi\varepsilon}.$$

Der Regularteil $\bar{w}$ (4, 1) wird demnach

$$\bar{w} = -\frac{1}{6\pi}\sum_n{}' \frac{\sin n\pi\delta}{n}\left[5+n\pi\varepsilon+(1+2n\pi\eta)\right] e^{-n\pi(\eta+\varepsilon)}\cdot\sin n\pi\xi.$$

Die Differenz $\left(-N\frac{\partial^2 K_0^{IV}}{\partial u} - \bar{w}\right)$ ergibt die modifizierte Singularität für m_x am Halbstreifen, solange der Aufpunkt innerhalb desselben liegt. Läßt man nun den Aufpunkt an den Rand wandern ($\varepsilon = 0$), so erhält man die modifizierte entartete Singularität für das Randmoment.

$$-N\frac{\partial^2 K_0^{VII}}{\partial u^2} = \frac{2}{3\pi}\sum_n{}' \frac{\sin n\pi\delta}{n}(2+n\pi\eta)\,e^{-n\pi\eta}\cdot\sin n\pi\xi. \tag{4, 8}$$

Da die entwickelte Form für die Darstellung einer Singularität in der Nähe des Aufpunktes ungeeignet ist, soll ein geschlossener analytischer Ausdruck dafür gesucht werden.

Nádai[9] gibt für die mittlere Krümmung Δw am Plattenstreifen infolge einer Einzellast $P = 1$ einen Ausdruck in entwickelter Form

$$-N\Delta w = \frac{1}{\pi}\sum_n{}' \frac{\sin n\pi\delta}{n} e^{-n\pi\eta}\cdot\sin n\pi\xi \tag{4, 9}$$

und mit Hilfe der konformen Abbildung des Plattenstreifens auf den Einheitskreis einen analytischen Ausdruck an:

$$-N\Delta w = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\zeta-\delta)}. \tag{4, 10}$$

(4, 9) und (4, 10) sind identische Ausdrücke. Weitere Identitäten können durch Differentiation von (4, 9) und (4, 10) gewonnen werden.

$$\sum_n \frac{\sin n\pi\delta}{n} e^{-n\pi\eta} \cdot \sin n\pi\xi \equiv \frac{1}{4} \ln \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)}. \qquad (4, 11)$$

Die partielle Differentiation von (4, 11) nach η bringt

$$\sum_n \sin n\pi\delta\, e^{-n\pi\eta} \cdot \sin n\pi\xi \equiv \frac{1}{4}\, \mathfrak{Sin}\,\pi\eta \left[\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)} - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)}\right]. \qquad (4, 12)$$

Die Differentiation nach δ

$$\sum_n \cos n\pi\delta \cdot e^{-n\pi\eta} \cdot \sin n\pi\xi \equiv \frac{1}{4}\left[\frac{\sin\pi(\xi+\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)} + \frac{\sin\pi(\xi-\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)}\right]. \qquad (4, 13)$$

Die Differentiation von (4, 12) nach δ

$$\sum_n n\cos n\pi\delta \cdot e^{-n\pi\eta} \cdot \sin n\pi\xi \equiv \frac{1}{4}\, \mathfrak{Sin}\,\pi\eta \left\{\frac{\sin\pi(\xi+\delta)}{[\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)]^2} + \frac{\sin\pi(\xi-\delta)}{[\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)]^2}\right\}. \qquad (4, 14)$$

Diese Identitäten bleiben erhalten, wenn die Gl. (4, 11) bis (4, 14) mit beliebigen Faktoren, auch mit Veränderlichen, z. B. η, multipliziert werden.

Unter Beachtung von (4, 11) und (4, 12) kann (4, 8) in geschlossener Form angeschrieben werden, indem man die Summen durch die identischen, geschlossenen Ausdrücke ersetzt. Es wird somit die entartete, modifizierte Singularität des Biegungsmomentes

$$-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2} =$$

$$= \frac{1}{3\pi}\left\{\ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)} - \frac{\pi\eta}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\pi\eta\left[\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)} - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)}\right]\right\}. \qquad (4, 15)$$

Das Einflußfeld für das Randmoment m_x am Halbstreifen (die Singularität $-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}$ mit dem Aufpunkt in Mitte des freien Randes ($\delta = 1/2$) folgt der Gleichung:

$$-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2} = \mathrm{Einfl}\, m_x =$$

$$= \frac{1}{3\pi}\left[\ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta + \sin\pi\xi}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \sin\pi\xi} - \frac{\pi\eta}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\pi\eta\left(\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta + \sin\pi\xi} - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \sin\pi\xi}\right)\right]. \qquad (4, 15a)$$

Es ist in Abb. 6 dargestellt. Die Singularität $-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}$ beinhaltet neben dem singulären Anteil $-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{III}}}{\partial u^2}$ der entarteten Singularität (3, 3) auch noch einen regulären Teil, dessen Größe im Aufpunkt bestimmt werden soll.

$$\mathrm{Reg}\left(-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right) = \left(-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right) - \left(-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{III}}}{\partial u^2}\right). \qquad (4, 16)$$

Setzt man in (4, 16) die entsprechenden Werte ein, so erhält man im Aufpunkt ($\xi = \delta$, $\eta = 0$) einen unbestimmten Wert. Entwickelt man die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen in Reihen,[10] so lassen sich bestimmte Grenzwerte leicht nachweisen. Es wird

$$\mathrm{Reg}\left(-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{3\pi}\left[\ln\frac{2}{\pi^2}(1-\cos 2\pi\delta)\frac{a^2}{h^2} + 4\right]. \qquad (4, 17)$$

Die Kenntnis des Regularteiles ist notwendig, da die Berechnung des Restvolumens nach (3, 6a) des durch Schichtenlinien nicht mehr darstellbaren Teiles des Einflußfeldes nur für die entartete Singularität $-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{III}}}{\partial u^2}$ gilt.

Mit $\delta = \frac{1}{2}$ und $a = h$ wird (4, 17)

$$\mathrm{Reg}\left(-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{3\pi}\left(\ln\frac{4}{\pi^2} + 4\right) = \frac{3{,}097}{3\pi}.$$

In Abb. 6 ist die letzte Schichtenlinie mit $\frac{20}{8\pi} = \frac{7{,}5}{3\pi}$ beziffert. Der Inhalt des darüberliegenden unendlich langen Schlauches wird mit $3\pi\varkappa = 7{,}5 - 3{,}097 = 4{,}403$ nach (3, 6a) berechnet:

$$V(\varkappa) = 0{,}005349\, e^{-4{,}043} \cdot a^2 = 0{,}000006547\, a^2.$$

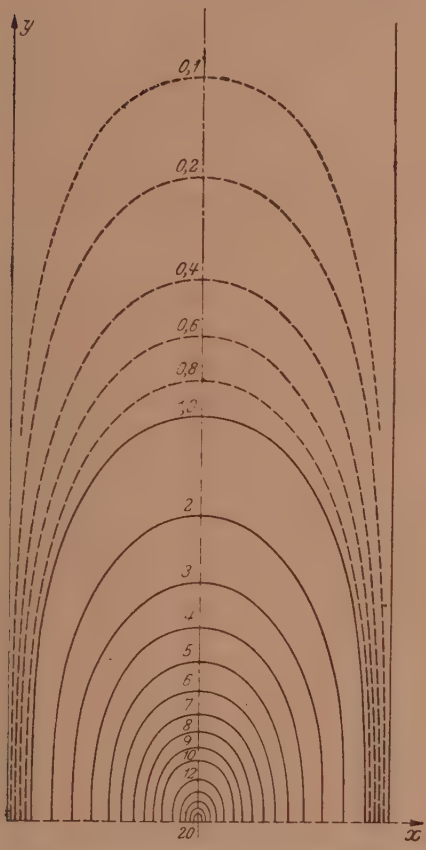

Abb. 6. Randmomenteneinflußfeld für m_x am Plattenhalbstreifen (8π-fach).

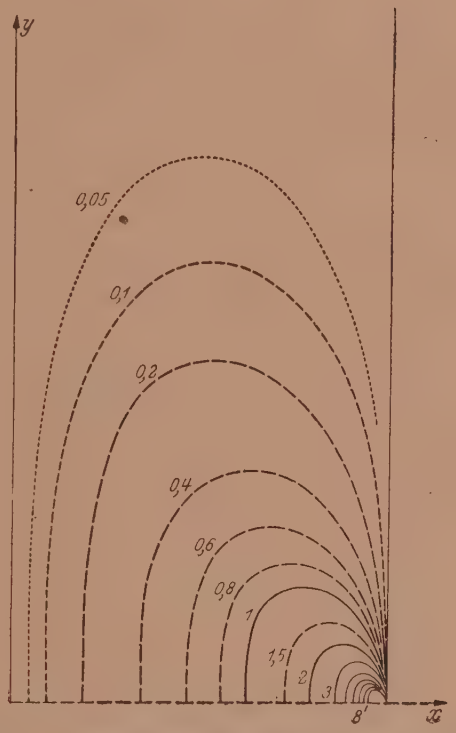

Abb. 7. Randstützkrafteinflußfeld für q_x am Plattenhalbstreifen.

c) Die Singularität für die Randquerkraft.

Das Verfahren zur Gewinnung der Singularität für die Randquerkraft ist das gleiche wie im vorigen Abschnitt. Ausgangspunkt ist die Singularität für die Querkraft am Plattenstreifen

$$-N\frac{\partial \Delta K_0^{\mathrm{IV}}}{\partial u} = \frac{1}{a}\sum_n \cos n\pi\delta \cdot e^{\mp n\pi(\eta-\varepsilon)} \cdot \sin n\pi\xi. \qquad (4, 18)$$

Durch Verwandlung des Plattenstreifens in einen Halbstreifen und Verlegung des Aufpunktes an den freien Rand erhält man

$$-N\frac{\delta \Delta K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u} = \frac{1}{3a}\sum_n \cos n\pi\delta\,(2 + n\pi\eta) \cdot e^{-n\pi\eta} \cdot \sin n\pi\xi. \qquad (4, 19)$$

Unter Beachtung der Identitäten (4, 13) und (4, 14) gewinnt man wieder einen analytischen Ausdruck für die modifizierte entartete Singularität der Querkraft:

$$-N\frac{\partial \Delta K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u}=\frac{1}{3a}\left\{\frac{\sin\pi(\xi+\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi+\delta)}+\frac{\sin\pi(\xi-\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi-\delta)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,\pi\eta}{2}\left[\frac{\sin\pi(\xi+\delta)}{[\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi+\delta)]^2}+\frac{\sin\pi(\xi-\delta)}{[\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi-\delta)]^2}\right]\right\}. \qquad (4,\ 20)$$

Da am freien Plattenrand wegen $-N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial v^2}=0$ die Momentensumme $-N\,\Delta K_0^{\mathrm{VII}}\equiv -N\frac{\partial^2 K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}$ wird, kann die Singularität für die Randquerkraft (4, 20) auch sofort durch Differentiation von (4, 15) nach u gefunden werden.

Wie beim Randmoment kann auch aus der Querkraftsingularität der reguläre Anteil abgeschieden werden.

$$\mathrm{Reg}\left(-N\frac{\partial \Delta K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u}\right)=\frac{1}{3a}\left\{\frac{\sin\pi(\xi+\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi+\delta)}+\frac{\sin\pi(\xi-\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi-\delta)}+\right.$$
$$+\frac{\pi\eta}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\pi\eta\left[\frac{\sin\pi(\xi+\delta)}{[\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi+\delta)]^2}+\frac{\sin\pi(\xi-\delta)}{[\mathfrak{Cof}\,\pi\eta-\cos\pi(\xi-\delta)]^2}\right]-$$
$$\left.-\frac{2}{\pi}\,\frac{\xi-\delta}{(\xi-\delta)^2+\eta^2}\left[1+\frac{\eta^2}{(\xi-\delta)^2+\eta^2}\right]\right\}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{\sin 2\pi\delta}{1-\cos 2\pi\delta}. \qquad (4,\ 21)$$

(4, 21) gilt, solange $0<\delta<1$.

In Abb. 7 ist das Stützkrafteinflußfeld des Halbstreifens, der Aufpunkt liegt in der Ecke des freien und unterstützten Randes ($\delta=1$), dargestellt. (4, 20) vereinfacht sich in diesem Falle zu

$$-N\frac{\partial \Delta K_0^{\mathrm{VII}}}{\partial u}=\mathrm{Einfl}\,q_x=\frac{1}{3a}\cdot\frac{\sin\pi\xi}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta+\cos\pi\xi}\left(2+\frac{\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,\pi\eta}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta+\cos\pi\xi}\right). \qquad (4,\ 20\mathrm{a})$$

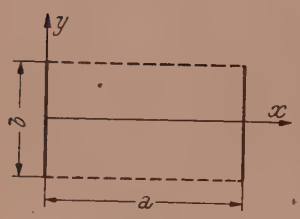

Abb. 8.

5. Einflußfelder von Rechteckplatten mit zwei freien Rändern.

Um die Einflußfelder von Platten mit zwei freien Rändern zu erhalten, wendet man die von A. Pucher bei Platten mit zwei eingespannten Rändern gezeigte Methode an.[11] An Stelle der Randbedingungen der eingespannten Ränder treten die der freien Ränder, die Verschwinden des Biegungsmomentes und der Querkraft verlangen.

Das singulare Integral ist durch ein allgemeines Integral von folgender Form zu ergänzen:

$$\overline{w}=\sum_n \sin n\pi\xi\,(A_n\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta+B_n\,n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta+C_n\,\mathfrak{Sin}\,n\pi\eta+D_n\,n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\,n\pi\eta). \qquad (5,1)$$

Die Randwerte des singulären Integrals $D\,[K_0]$ seien bekannt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial y^2}D\,[K_0]\Big|_{\eta=+\beta}=\sum_n g_n\sin n\pi\xi, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}D\,[K_0]\Big|_{\eta=-\beta}=\sum_n i_n\sin n\pi\xi,\\
&\frac{\partial^3}{\partial y^3}D\,[K_0]+2\frac{\partial^3}{\partial x^3\,\partial y}D\,[K_0]\Big|_{\eta=+\beta}=\sum_n h_n\cdot\sin n\pi\xi,\\
&\frac{\partial^3}{\partial y^3}D\,[K_0]+2\frac{\partial^3}{\partial x^3\,\partial y}D\,[K_0]\Big|_{\eta=-\beta}=\sum_n k_n\sin n\pi\xi.
\end{aligned}\right\} \qquad (5,\ 2)$$

Mit (5, 2) und den aus der Differentiation von (5, 1) gefundenen entsprechenden Ausdrücken erhält man für jedes n je vier lineare Gleichungen für die vier Unbekannten A_n, B_n, C_n, D_n, die denselben schematischen Aufbau wie beim Problem von Platten

mit zwei eingespannten Rändern zeigen. Mit dem Seitenverhältnis $\beta = \frac{b}{2a}$ und den nur von $n\beta$ abhängigen Funktionen

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{s,n} &= \frac{\operatorname{Sin} n\pi\beta - n\pi\beta \operatorname{Cof} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta - n\pi\beta}, & \lambda_{a,n} &= \frac{\operatorname{Cof} n\pi\beta - n\pi\beta \operatorname{Sin} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta + n\pi\beta},\\
\varkappa_{s,n} &= \frac{2\operatorname{Cof} n\pi\beta + n\pi\beta \operatorname{Sin} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta - n\pi\beta}, & \varkappa_{a,n} &= \frac{2\operatorname{Sin} n\pi\beta + n\pi\beta \operatorname{Cof} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta + n\pi\beta},\\
\mu_{s,n} &= \frac{\operatorname{Sin} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta - n\pi\beta}, & \mu_{a,n} &= \frac{\operatorname{Cof} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta + n\pi\beta},\\
\nu_{s,n} &= \frac{\operatorname{Cof} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta - n\pi\beta}, & \nu_{a,n} &= \frac{\operatorname{Sin} n\pi\beta}{{}^3/_2 \operatorname{Sin} 2n\pi\beta + n\pi\beta},
\end{aligned}\right\} \qquad (5,\ 3)$$

werden die Freiwerte

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= \lambda_{s,n}\frac{a^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{g_n + i_n}{2} - \varkappa_{s,n}\frac{a^3}{n^3\pi^3}\cdot\frac{h_n - k_n}{2},\\
B_n &= \mu_{s,n}\frac{a^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{g_n + i_n}{2} + \nu_{s,n}\frac{a^3}{n^3\pi^3}\cdot\frac{h_n - k_n}{2},\\
C_n &= \lambda_{a,n}\frac{a^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{g_n - i_n}{2} - \varkappa_{a,n}\frac{a^3}{n^3\pi^3}\cdot\frac{h_n + k_n}{2},\\
D_n &= \mu_{a,n}\frac{a^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{g_n - i_n}{2} + \nu_{a,n}\frac{a^3}{n^3\pi^3}\cdot\frac{h_n + k_n}{2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5,\ 4)$$

Setzt man sie in (5, 1) ein, so kann man den Regularteil in Reihenform berechnen. Die Addition $D\,[K_0] - \overline{w}$ bringt das gewünschte Einflußfeld; so wird z. B. das Einflußfeld für m_x solange $+\beta > \varepsilon > -\beta$

$$\begin{aligned}
\text{Einfl}\, m_x = \frac{1}{8\pi}\Big\{ &\ln\frac{\operatorname{Cof}\pi(\eta-\varepsilon) - \cos\pi(\xi+\delta)}{\operatorname{Cof}\pi(\eta-\varepsilon) - \cos\pi(\xi-\delta)} - \pi(\eta-\varepsilon)\operatorname{Sin}\pi(\eta-\varepsilon)\times\\
&\times\left[\frac{1}{\operatorname{Cof}\pi(\eta-\varepsilon) - \cos\pi(\xi+\delta)} - \frac{1}{\operatorname{Cof}\pi(\eta-\varepsilon) - \cos\pi(\xi-\delta)}\right] +\\
&+ 4\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{e^{-n\pi\beta}}{n}\sin n\pi\delta\cdot\sin n\pi\xi\times\\
&\times\Big[\{\lambda_{s,n}[(1-n\pi\beta)\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon] +\\
&\quad + \varkappa_{s,n}[(2+n\pi\beta)\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon - n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon]\}\cdot\operatorname{Cof} n\pi\eta +\\
&+ \{\mu_{s,n}[(1-n\pi\beta)\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon] -\\
&\quad - \nu_{s,n}[(2+n\pi\beta)\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon - n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon]\}\cdot n\pi\eta\operatorname{Sin} n\pi\eta +\\
&+ \{\lambda_{a,n}[(1-n\pi\beta)\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon] +\\
&\quad + \varkappa_{a,n}[(2+n\pi\beta)\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon - n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon]\}\operatorname{Sin} n\pi\eta +\\
&+ \{\mu_{a,n}[(1-n\pi\beta)\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon + n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon] -\\
&\quad - \nu_{a,n}[(2+n\pi\beta)\operatorname{Sin} n\pi\varepsilon - n\pi\varepsilon\cdot\operatorname{Cof} n\pi\varepsilon]\}\cdot n\pi\eta\operatorname{Cof} n\pi\eta\Big]\Big\}. \qquad (5,\ 5)
\end{aligned}$$

Will man das Einflußfeld für das Randmoment m_x gewinnen, so ist für $D\,[K_0]$ die in Abschnitt (4, b) gewonnene Singularität zu setzen.

Für den Ausdruck (4, 8) bzw. (4, 15) ist der Ursprung des Koordinatensystems am freien Rand festgelegt, während die freien Ränder in den Entwicklungen (5, 1), (5, 2) und (5, 3) die Koordinaten $\eta = \pm\beta$ haben. Liegt nun der Aufpunkt am Rande $\eta = -\beta$, so muß in (4, 8) $\eta + \beta$ statt η gesetzt werden. Da $-N\frac{\partial^2 K_0^{\text{VII}}}{\partial u^2}$ die Randbedingungen schon an drei Rändern ($\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = -\beta$) erfüllt, wird $i_n = k_n = 0$; für $\eta = +\beta$ bringen die Randwerte die Ausdrücke

$$g_n = \frac{2\pi}{3a^2} n \sin n\pi\delta \cdot 2n\pi\beta \cdot e^{-2n\pi\beta},$$

$$h_n = \frac{2\pi^2}{3a^3} n^2 \sin n\pi\delta\,(3 + 2n\pi\beta)\, e^{-2n\pi\beta}.$$

Damit wird das Einflußfeld für das Randmoment m_x

$$\begin{aligned}\text{Einfl}\, m_x = \frac{1}{3\pi}\Bigg\{&\ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)} - \\ &- \frac{\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,\pi\eta}{2}\left[\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi+\delta)} - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi(\xi-\delta)}\right]\Bigg\} - \\ &- \frac{1}{3\pi}\sum_{n=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\pi\delta}{n} e^{-2n\pi\beta}\cdot\sin n\pi\xi \times \\ &\times\{[\lambda_{s,n}\, 2n\pi\beta - \varkappa_{s,n}(3+2n\pi\beta)]\,\mathfrak{Cof}\, n\pi\eta + \\ &+ [\mu_{s,n}\, 2n\pi\beta + \nu_{s,n}(3+2n\pi\beta)]\, n\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\eta + \\ &+ [\lambda_{a,n}\, 2n\pi\beta - \varkappa_{a,n}(3+2n\pi\beta)]\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\eta + \\ &+ [\mu_{a,n}\, 2n\pi\beta + \nu_{a,n}(3+2n\pi\beta)]\, n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\, n\pi\eta\}. \qquad (5,6)\end{aligned}$$

6. Schlußbemerkung.

Wie im Abschnitt 4 erläutert, wurden durch einen einfachen Grenzübergang entartete modifizierte Singularitäten gefunden, die neben der Randbedingung des Randes, auf dem der Aufpunkt liegt, auch noch an anderen Rändern den geforderten Randbedingungen genügen.

Die Verwendung entarteter modifizierter Singularitäten für die Berechnung der Einflußfelder, besonders von Rechteckplatten, erweist sich als sehr vorteilhaft, da durch das reguläre Integral die Randwerte des Singularteiles nur mehr an einem Rand befriedigt werden müssen. Die Zahlenrechnung wird, wie leicht einzusehen ist, in diesem Falle besonders einfach und kurz.

Die Anwendung einer entarteten modifizierten Singularität erhält aber erst dadurch praktische Bedeutung, daß für die entwickelte Form derselben, die bekanntlich in Aufpunktsnähe nicht mehr brauchbar ist, durch die Identitäten (4, 11) bis (4, 14) geschlossene analytische Ausdrücke gebildet werden können, mit deren Hilfe jede gewünschte Rechnungsgenauigkeit erzielt wird.

Die erwähnten Identitäten ermöglichen es, in der Plattentheorie vielfach vorkommende Reihen in geschlossener Form zu summieren. Läßt man eine Veränderliche 0 werden, so gewinnt man zum Beispiel

$$\sum_n \frac{\sin n\pi\delta \sin n\pi\xi}{n} \equiv \frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos\pi(\xi+\delta)}{1-\cos\pi(\xi-\delta)}. \qquad (6,1)$$

Differenziert man (6, 1), so lassen sich weitere gleichwertige Ausdrücke bilden. Mit Hilfe dieser, vermutlich bisher nicht bekannten Beziehungen wird man bei der Berechnung von Platten weitgehende Vereinfachungen erzielen können.

Durch die Einführung der entarteten Singularitäten am freien Plattenrand scheint die Entwicklung der Singularitätenmethode elastischer Platten zu einem gewissen Abschluß gelangt zu sein, da nunmehr die entarteten Singularitäten für alle Schnittkräfte am eingespannten, am freien drehbaren und am freien Plattenrand bekannt sind. Die Einführung einer modifizierten, entarteten Singularität bringt überdies einen Fortschritt in den Berechnungsmethoden der Einflußfelder, bei denen der Aufpunkt an einem Rande liegt, der sich insbesondere in der Verbesserung der Konvergenz der Reihen für das allgemeine Integral $\overline{w}$ zeigt.

Literatur:

[1] P. Nemenyi: Z. angew. Math. Mech. 9, 448 (1929); 10, 383 (1930). A. Pucher: Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten. H. 90 d. Dtsch. Aussch. f. Eisenbeton. Berlin 1938. A. Pucher: Ing.-Arch. 12, 76 (1941). — [2] A. Pucher: A. a. O. S. 81. — [3] R. Ohling: Bauing. 445 (1938). — [4] H. Olsen u. F. Reinitzhuber: Bautechn. 188 (1943). — [5] A. Pucher: Ing.-Arch. 14, 258. — [6] A. Nádai: Elastische Platten, S. 204. Berlin 1925. — [7] A. Pucher: A. a. O. S. 258ff. — [8] A. Pucher: A. a. O. S. 259. — [9] A. Nádai: A. a. O. S. 94. — [10] A. Pucher: A. a. O. S. 260. — [11] A. Pucher: A. a. O. S. 247ff.

(Eingegangen am 13. Dezember 1945.)

Die Verbrennung von Kohleteilchen in turbulent bewegter Luft.

Von **H. Mache**, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Einleitung.

Die seit 1918 im wesentlichen empirisch vorangekommene Kohlenstaubfeuerung, aber auch der Schutz gegen Brand und Explosion von Staub-Luft-Gemengen im Betrieb und in der Grube haben bereits wiederholt zu dem Versuch geführt, für die Staubverbrennung theoretische Grundlagen zu schaffen, welche die technischen Entwicklungen auf diesem Gebiete zu lenken, zu beschleunigen und wohl auch zu verbilligen imstande wären.

Unter diesen Versuchen ist eine von W. Nusselt in München stammende Theorie der Kohlenstaubverbrennung die bisher erfolgreichste. Sie geht von der Vorstellung aus, daß das in der Luft schwebende Kohleteilchen den zu seiner Verbrennung nötigen Sauerstoff hauptsächlich durch Konvektion, d. h. durch Luftströmungen und Wirbel zugeführt erhält, die bis auf die Oberfläche des Kohleteilchens gelangen. Es ist dann ohne weiteres möglich, die von Nusselt für den Wärmeübergang mit großem Vorteil benützten Ähnlichkeitsbetrachtungen auch auf diesen rechnerisch ganz analogen Fall des Sauerstoffüberganges zum brennenden Teilchen zu übertragen. Daß damit Formeln gewonnen werden, welche der einschlägigen Praxis dienlich sind, läßt ein Buch von Wilhelm Gumz erkennen, das 1939 bei Springer unter dem Titel „Theorie und Berechnung der Kohlenstaubfeuerungen“ erschienen ist.

Demgegenüber werden in der vorliegenden Arbeit Vorstellungen herangezogen und rechnerisch entwickelt, nach welchen es die reine Diffusion ist, die den Sauerstoff der Luft auf die Oberfläche des brennenden Teilchens gelangen läßt. Hiernach strömen die bei der Verbrennung der Kohle entwickelten heißen Gase, also in erster Linie Kohlendioxyd, radial von dem in der Luft schwebenden Kohleteilchen ab, ohne sich zunächst mit der umgebenden Luft zu vermischen. Jedes brennende Teilchen ist von einer einige Zehntel Millimeter dicken Hülle umgeben, die es mit sich führt und innerhalb welcher diese radiale Strömung noch steif genug ist, um ein Eindringen der umgebenden Luft in diesen Strömungsraum zu verhindern. Erst in einer gewissen Entfernung wird die Vermischung erfolgen. So muß der Sauerstoff, um zur Kohle zu gelangen, durch eine Hülle von hocherhitztem Kohlendioxyd entgegen der in ihr herrschenden, nach auswärts gerichteten Strömung bis auf die Oberfläche des brennenden Teilchens hindurchdiffundieren. Es ist dieses Problem quasistationärer Diffusion in einem radial bewegten Gas, das die Grundlage für unsere theoretischen Betrachtungen liefert.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile:

Im ersten Teil wird die Brenndauer eines einzelnen Kohleteilchens in Luft in Abhängigkeit von seiner Größe berechnet. Es zeigt sich, daß diese Brenndauer aus anderweitig bekannten physikalischen Daten berechenbar ist. Es bedarf hierzu nur der Einführung einer einzigen, dem vorliegenden Problem eigentümlichen Konstanten, als welche die Dicke der das Teilchen umgebenden Hülle erscheint.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die Ausbreitung einer Entzündung durch ein Kohlenstaub-Luft-Gemisch unter der Voraussetzung behandelt, daß sich das Gemisch in turbulenter Bewegung befindet, so daß die gezündeten Teilchen rasch durch die ganze Brennkammer vertragen werden. Es werden zwei Grenzfälle behandelt: Im ersten wird angenommen, daß die Teilchen klein sind, so daß die Brenndauer des Einzelteilchens kurz ist gegenüber der Zeit, die das ganze Gemisch zu seiner Entzündung braucht. Es wächst dann die Zahl der brennenden Teilchen nach einer divergenten geometrischen Reihe, deren Partialsumme praktisch durch den Wert des letzten Gliedes bestimmt wird. So erklärt sich die Zweiteilung der zur Zündung eines Kohlenstaub-Luft-Gemisches gebrauchten Zeit in eine längere „Anlaufzeit" und eine zur Hauptzündung nötige, kurze, eigentliche Zündungs- und Verbrennungszeit, die von der Brenndauer des Einzelteilchens nicht weit verschieden ist. Im zweiten Grenzfall wird angenommen, daß die Teilchen groß sind, so daß umgekehrt die Brenndauer des Einzelteilchens die zur Zündung des ganzen Gemisches nötige Zeit wesentlich übertrifft. Auch hier besteht eine Anlaufzeit, auf welche die rasche Hauptzündung folgt, die schließlich in eine Exponentielle ausklingt. Natürlich geht aber jetzt die Verbrennung nach erfolgter Entzündung noch längere Zeit weiter.

1. Berechnung der Brenndauer eines in turbulent bewegter Luft schwebenden Kohleteilchens.

Die Entzündung soll bereits über die ganze Oberfläche des kugelförmig angenommenen Teilchens erfolgt sein. Dieser Vorgang wird durch vorhergehende Entgasung des Teilchens sehr unterstützt. Die Verbrennungsgase strömen dann radial ab, ohne sich zunächst mit der umgebenden Luft zu vermischen oder wesentlich abzukühlen.* So ist das brennende Teilchen von einem im Durchschnitt kugelsymmetrischen Raum umgeben, den es mit sich führt und in welchem die radiale Geschwindigkeit u mit r der Entfernung vom Zentrum quadratisch abnimmt. Es ist $u_r = u_0 \frac{a^2}{r^2}$, wo u_0 die Geschwindigkeit der Strömung auf der Oberfläche und a den Radius des Teilchens bezeichnet. Erst in einer gewissen Entfernung $r = s$ ist diese zunächst steife Strömung schwach genug geworden, um sich mit der umgebenden, wirbelnden Luft vermischen zu können.

Durch diesen Raum, der die Form einer Kugelschale von der Dicke $s - a$ besitzt, muß, den Verbrennungsgasen entgegen, der Sauerstoff der Luft zur Oberfläche des Teilchens diffundieren, wo er mit der Kohle verbrennt und den ganzen Vorgang als quasistationären Prozeß erhält. Man wird annehmen dürfen, daß an der Oberfläche dieses Strömungs- oder Diffusionsraumes die Sauerstoffkonzentration derjenigen in der Luft entspricht, während sie an der Oberfläche des Teilchens ($r = a$), wo der Sauerstoff restlos verbraucht wird, ständig den Wert Null aufweist.

Ändert sich der Radius des Teilchens um $-da$, also sein Volumen um $-4\pi a^2 da$ und ist γ die Dichte der Kohle, so wurde die Kohlenmenge $4\pi a^2 \gamma da$ verbrannt, und da zur Verbrennung von 1 g Kohle 2,666 g Sauerstoff benötigt werden, muß das im quasistationären Zustand bestehende Konzentrationsgefälle im ganzen Strömungsraum gerade so groß sein, daß überall durch die Fläche $4\pi r^2$ die Sauerstoffmenge

* Für kleinste Teilchen wird die Abkühlung zu berücksichtigen sein.

$2{,}666 \cdot 4\,\pi\,a^2\,\gamma\,da$ von außen nach innen diffundiert. Es ergibt sich dann das in der Entfernung r vorhandene Konzentrationsgefälle $\frac{\partial c}{\partial r}$ aus der Gleichung

$$\delta \cdot 4\,\pi\,r^2 \frac{\partial c}{\partial r}\,dt = 2{,}666 \cdot 4\,\pi\,a^2\,\gamma\,da, \tag{1}$$

worin aber δ nicht den Diffusionskoeffizienten des Sauerstoffs im ruhenden, sondern in dem mit der Geschwindigkeit $u = u_0 \frac{a^2}{r^2}$ der Diffusion entgegenbewegten Verbrennungsgas bedeutet. Wir können dieses δ aus dem im ruhenden Gas zu messenden Diffusionskoeffizienten Δ durch die folgende Überlegung gewinnen:

Die Konzentration c ist durch die Masse der im cm³ enthaltenen O_2-Moleküle gegeben und diese ist wieder dem von ihnen ausgeübten Partialdruck P proportional. Bedeutet $\mathfrak{N}$ die auf 1 cm³ bezogene Loschmidtsche Zahl, μ die Masse des Sauerstoffmoleküls und P den Atmosphärendruck, so ist

$$c = \mathfrak{N}\,\mu\,\frac{P}{P} = \varrho\,\frac{P}{P},$$

wo ϱ die Dichte des Sauerstoffs bezeichnet. Bedeutet ferner V die Geschwindigkeit, mit der sich diese Moleküle im ruhenden Gas infolge des Konzentrationsgefälles $\frac{\partial c}{\partial r}$ bewegen, so gibt sowohl $c\,V$ wie auch $\Delta \frac{\partial c}{\partial r} = \Delta \frac{\varrho}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial r}$ die Masse der je Sekunde die Querschnittseinheit passierenden Moleküle, woraus für das ruhende Gas eine Diffusionsgeschwindigkeit

$$V = \frac{\Delta}{c}\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\Delta}{P}\frac{\partial P}{\partial r}$$

berechnet wird. Im strömenden Gas ist hingegen diese Geschwindigkeit durch Konvektion um u vermindert, also relativ zum fixen Koordinatensystem nur eine Diffusionsgeschwindigkeit von $\frac{\Delta}{P}\frac{\partial P}{\partial r} - u = \frac{\Delta}{P}\frac{\partial P}{\partial r} - u_0\frac{a^2}{r^2}$ vorhanden, so als ob der Diffusionskoeffizient nicht Δ, sondern nur δ betragen würde, wie er sich aus

$$\frac{\Delta}{P}\frac{\partial P}{\partial r} - u_0\frac{a^2}{r^2} = \frac{\delta}{P}\frac{\partial P}{\partial r}$$

zu

$$\delta = \frac{P}{\frac{\partial P}{\partial r}}\left[\frac{\Delta}{P}\frac{\partial P}{\partial r} - u_0\frac{a^2}{r^2}\right] = \Delta - \frac{u_0 P}{\frac{\partial P}{\partial r}} \cdot \frac{a^2}{r^2} \tag{2}$$

berechnet. Setzt man diesen Wert in unsere Gleichung ein, so wird

$$\left(\Delta - \frac{u_0 P}{\frac{\partial P}{\partial r}} \cdot \frac{a^2}{r^2}\right) 4\,\pi\,r^2 \frac{\partial c}{\partial r}\,dt = 2{,}666 \cdot 4\,\pi\,a^2\,\gamma\,da$$

oder

$$\left(\Delta - \frac{u_0 P}{\frac{\partial P}{\partial r}} \cdot \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{\varrho}{P}\,r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\,dt = 2{,}666\,a^2\,\gamma\,da.$$

Es besteht somit zwischen der Verbrennungsgeschwindigkeit $\frac{da}{dt}$ des Teilchens und dem Partialdruckgefälle, wie es in der Entfernung r vom Mittelpunkt vorhanden ist, zufolge der Kontinuitätsbedingung der Zusammenhang

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2{,}666} \cdot \frac{\varrho}{P\gamma}\,\frac{r^2}{a^2}\left(\Delta\frac{\partial P}{\partial r} - u_0\frac{a^2}{r^2}P\right) \tag{3}$$

und für die Oberfläche des Teilchens ($P = 0$ für $r = a$) die Beziehung

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2{,}666} \cdot \frac{\varrho}{P\gamma} \cdot \Delta\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{r=a}. \tag{4}$$

Da u_0, die Geschwindigkeit, mit der die Verbrennungsgase von der Oberfläche des brennenden Teilchens abströmen, dem $\frac{da}{dt}$ proportional ist und der Proportionalitäts-

faktor auf Grund der Verbrennungstemperatur seinem absoluten Betrage nach angegeben werden kann, erhält man die Verbrennungsgeschwindigkeit aus Gl. (3) oder einfacher mittels Gl. (4) aus dem an der Oberfläche des Teilchens herrschenden Partialdruckgefälle $\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{r=a}$. Es ist unsere nächste Aufgabe, dieses Druckgefälle zu berechnen.

Wie eben bemerkt wurde, verläuft die Diffusion im strömenden Gase wie im ruhenden, falls man den konstanten Diffusionskoeffizienten Δ des Sauerstoffs im Verbrennungsgas durch den mit dem Radius r variabeln, scheinbaren Diffusionskoeffizienten $\delta = \Delta - \frac{u_0 P}{\frac{\partial P}{\partial r}} \cdot \frac{a^2}{r^2}$ aus Gl. (2) ersetzt. Nur muß hier auch in der für Kugelsymmetrie geltenden Grundgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \delta\left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial P}{\partial r}\right]$$

vor Einsetzen des δ diese Abhängigkeit des δ von r berücksichtigt werden, was für den hier allein untersuchten stationären Fall die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \delta\left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial P}{\partial r}\right] + \frac{\partial \delta}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \tag{5}$$

ergibt. Verwendet man den oben für δ gegebenen Wert, so erhält man

$$\frac{d\delta}{dr} = -u_0 a^2 \frac{r^2\left(\frac{dP}{dr}\right)^2 - P\left[2r\frac{dP}{dr} + r^2\frac{d^2P}{dr^2}\right]}{r^4\left(\frac{dP}{dr}\right)^2} = u_0 a^2\left\{-\frac{1}{r^2} + \frac{2P}{r^3\frac{dP}{dr}} + \frac{P\frac{d^2P}{dr^2}}{r^2\left(\frac{dP}{dr}\right)^2}\right\}$$

und

$$\delta\left[\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dP}{dr}\right] = \Delta\left[\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dP}{dr}\right] - u_0 a^2\left[\frac{P}{r^2}\frac{\frac{d^2P}{dr^2}}{\frac{dP}{dr}} + 2\frac{P}{r^3}\right].$$

Schreibt man $u_0 a^2/\Delta = A$, so wird

$$\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dP}{dr} - A\frac{P}{r^2}\frac{\frac{d^2P}{dr^2}}{\frac{dP}{dr}} - \frac{2AP}{r^3} - \frac{A}{r^2}\frac{dP}{dr} + \frac{2AP}{r^3} + A\frac{P}{r^2}\frac{\frac{d^2P}{dr^2}}{\frac{dP}{dr}} =$$

$$= \frac{d^2P}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{A}{r^2}\right)\frac{dP}{dr} = 0 \tag{6}$$

die hier zu integrierende Gleichung. Man erhält

$$\frac{dP}{dr} = \frac{C_1}{r^2} e^{-\frac{A}{r}} \tag{7}$$

und nach nochmaliger Integration

$$P = \frac{C_1}{A} e^{-\frac{A}{r}} + C_2.$$

Da die Lösung so beschaffen sein muß, daß für $r = a$, $P = o$ und für $r = s$, $P = \mathfrak{P}$, d. h. gleich dem Partialdruck des Sauerstoffs in der Luft wird, berechnet man

$$C_1 = \frac{A\mathfrak{P}}{e^{-\frac{A}{s}} - e^{-\frac{A}{a}}}, \quad C_2 = -\frac{\mathfrak{P} e^{-\frac{A}{a}}}{e^{-\frac{A}{s}} - e^{-\frac{A}{a}}} \quad \text{und} \quad P = \mathfrak{P}\frac{e^{-\frac{A}{r}} - e^{-\frac{A}{a}}}{e^{-\frac{A}{s}} - e^{-\frac{A}{a}}}. \tag{8}$$

Das Druckgefälle wird nach Gl. (7) allgemein

$$\frac{dP}{dr} = \frac{A\mathfrak{P} e^{-\frac{A}{r}}}{r^2\left(e^{-\frac{A}{s}} - e^{-\frac{A}{a}}\right)}$$

und an der Oberfläche

$$\left(\frac{dP}{dr}\right)_{r=a} = \frac{A\,\mathfrak{P}}{a^2\left[e^{A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{s}\right)}-1\right]}. \qquad (9)$$

Dieser Ausdruck gibt das gesuchte Partialdruckgefälle an der Oberfläche des Teilchens, das, in Gl. (4) eingesetzt, die Verbrennungsgeschwindigkeit für ein Teilchen vom Halbmesser a berechnen ließe, falls noch der Halbmesser s des zugehörigen Diffusionsraumes bekannt wäre.

Zu einer ersten Orientierung über die Größe s benützen wir die Versuche von Smith und Gudmundsen[1, 2] über den Abbrand von Kügelchen aus Elektrodenkohle ($\gamma = 1{,}36\ \mathrm{g/cm^3}$), die, an einem Pt-Drähtchen befestigt, in einem Rohr von 12,7 mm innerem Durchmesser hängen, durch das auf 1000° C erhitzte Luft mit verschiedener Geschwindigkeit (w) geblasen wird. Die Oberflächentemperatur des Kügelchens (ϑ) wird optisch durch ein Fenster gemessen. Die Abnahme des Durchmessers von d_1 auf d_2, die während der Zeit t beobachtet wurde, gestattet die Berechnung der mittleren Verbrennungsgeschwindigkeit $\left(\frac{da}{dt}\right)_m$ und der Geschwindigkeit u_0, mit der die Verbrennungsgase von der Oberfläche des Kügelchens abströmen. Wir ordnen diese Werte einem mittleren Halbmesser $a_m = \frac{1}{2}\left[d_2 + \frac{d_1 - d_2}{2}\right]$ zu. Es wird angenommen, daß die Kohle vollkommen zu CO_2 verbrennt, also 1 g Kohle 2,666 g O_2 verbraucht. Schließlich setzen wir den Diffusionskoeffizienten des Sauerstoffs durch das mit der Temperatur der Oberfläche abströmende Kohlendioxyd schätzungsweise gleich 3 cm²/s, indem wir uns auf Messungen berufen, die H. A. Wilson* und andere[3, 4, 5] über die Diffusion der Dämpfe von Alkalimetallen durch die Brenngase einer Bunsenschen Flamme ausgeführt haben. Man wird diese für die Theorie der Verbrennung so wichtige Größe eigens zu bestimmen haben. Solange aber derartige Messungen nicht vorliegen, wird man sich mit der obigen Schätzung begnügen können. Entsprechen doch die mittels dieses Wertes für Kohleteilchen berechneten Brenndauern, wie wir zeigen werden, den tatsächlichen Beobachtungen und den theoretischen Ansätzen, durch die Nusselt diese Beobachtungen dargestellt hat.

Wir berechnen mittels der Gasgleichung zunächst das u_0 aus dem sekundlich gebildeten CO_2 und der mittleren Oberfläche des Teilchens, ferner das $\left(\frac{da}{dt}\right)_m = \frac{d_1 - d_2}{2\,t}$ und erhalten durch Einsetzen von Gl. (9) in Gl. (4)

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varrho}{2{,}666\,P\gamma} \cdot \frac{u_0\,\mathfrak{P}}{\left[e^{\frac{u_0\,a}{\Delta s}(s-a)}-1\right]} \quad \text{und} \quad e^{\frac{u_0\,a}{\Delta s}(s-a)} = 1 + \frac{\varrho\,u_0\,\mathfrak{P}}{2{,}666\,P\gamma\,\frac{da}{dt}}.$$

Mit $\frac{\mathfrak{P}}{P} = \frac{158}{760} = 0{,}208$, $\varrho = \varrho_0 \frac{273}{273+\vartheta} = 0{,}001429 \cdot \frac{273}{273+\vartheta}$ und den oben gegebenen und in der folgenden Zahlentafel 1 sonst verzeichneten Werten kann man jetzt für die verschiedenen Anblasegeschwindigkeiten w die Größe s und die mittlere

Zahlentafel 1.

d_1 mm	d_2 mm	ϑ °C	t sek	d_1-d_2 mm	a_m mm	$\left(\frac{da}{dt}\right)_m$ mm/s	u_0 mm/s	w m/s	s mm	$s-a_m$ mm
4,61	2,37	1262	120	2,24	1,75	0,0093	138	1,41	2,31	0,56
4,59	1,52	1277	90	3,07	1,54	107	266	4,53	1,80	0,26
4,32	1,58	1286	70	2,74	1,48	196	303	8,74	1,71	0,23
4,62	2,95	1272	35	1,67	1,90	239	347	13,29	2,08	0,18

* Wilson und Symon erhalten für das nur wenig schwerere Kaliumatom in den wegen ihres Wasserdampfgehaltes wesentlich leichteren Brenngasen der Bunsenflamme bei 1436° C die Werte 4,7 und 5,8 cm²/s.

Dicke $s - a_m$ des das Kügelchen umgebenden Diffusionsraumes berechnen, in den die Strömung nicht eindringt. Daß es sich hierbei trotz der ganz einseitigen Strömung um einen durch eine Kugel approximierbaren Raum handelt, beweist die Bemerkung, daß beim Abbrand die Kugelform gut erhalten blieb.

Aus den letzten Vertikalreihen läßt sich folgern, daß die Differenz $s - a_m$ um so kleiner wird, je größer die Geschwindigkeit ist, mit der die Luft an dem Kügelchen vorbeistreicht. In Luft von 1000° C hat ein Kügelchen von 1,7 mm Radius eine Schwebegeschwindigkeit von mehr als 100 m/s. Dort wird die Dicke der Diffusionsschicht unter 0,1 mm liegen. Anderseits nimmt sie rasch zu, wenn die Geschwindigkeit auf kleine Werte sinkt. Das steht mit unseren Vorstellungen durchaus im Einklang. Je kleiner die Relativgeschwindigkeit des Diffusionsraumes zur umgebenden Luft bleibt, desto weiter werden die vom Kohleteilchen abströmenden Verbrennungsgase gelangen, ehe sie von der Luft durchbrochen und von ihr mitgenommen werden.

Kehren wir nun zu unserer Gl. (9) zurück. Setzt man sie in Gl. (4) ein, schreibt für A seinen Wert $A = \frac{u_0 a^2}{\Delta}$ und berücksichtigt, daß die Geschwindigkeit, mit der das Verbrennungsprodukt von der Oberfläche des Teilchens abströmt, der Dichte der Kohle γ, der Verbrennungstemperatur T und der Verbrennungsgeschwindigkeit $\frac{da}{dt}$ proportional ist, also

$$u_0 = C \gamma T \frac{da}{dt} \tag{10}$$

geschrieben werden kann, so erhält man wegen $\varrho = \varrho_0 \frac{273}{T}$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2{,}666} \frac{\varrho \Delta}{P \gamma} \cdot \frac{u_0 a^2}{\Delta} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{a^2 \left[e^{A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right)} - 1 \right]} = \frac{273\, \varrho_0 C}{2{,}666} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{P} \cdot \frac{da}{dt} \cdot \frac{1}{e^{A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right)} - 1}$$

oder

$$e^{A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right)} = 1 + \frac{273\, \varrho_0 C}{2{,}666} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{P} = 1 + \frac{\mathfrak{P}}{P}.*$$

Das gibt, wenn wir nun auch im Exponenten für A seinen Wert setzen,

$$C \gamma T \frac{da}{dt} \frac{a^2}{\Delta} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s} \right) = \ln \left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{P} \right)$$

und

$$\frac{a^2}{\Delta} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s} \right) \frac{da}{dt} = \frac{1}{C \gamma T} \ln \left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{P} \right) = B, \tag{11}$$

wo B eine nur von der Kohlenart abhängige Größe bedeutet. Man findet durch Vereinigung mit Gl. (10) für die Geschwindigkeit u_0, mit der das Verbrennungsgas von der Oberfläche des Teilchens abströmt, allgemein

$$u_0 = \frac{\Delta \ln \left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{P} \right)}{a^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s} \right)} = \frac{\Delta \ln \left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{P} \right)}{\frac{a}{s} (s - a)}, \tag{12}$$

---

* Soweit die Kohle vollständig verbrennt, ist $\frac{273\, \varrho_0 C}{2{,}666} = 1$. Es ist nämlich die O_2-Masse, die das Kohleteilchen je Sekunde verbraucht, gleich $2{,}666 \cdot 4 \pi a^2 \gamma \frac{da}{dt}$ und die Masse des hierbei entwickelten CO_2 gleich $3{,}666 \cdot 4 \pi a^2 \gamma \frac{da}{dt}$. Diese hat beim Druck P und der Temperatur T nach der Gasgleichung ein Volumen $3{,}666 \cdot 4 \pi a^2 \gamma \frac{da}{dt} \cdot \frac{R}{P} T$ oder wegen $\frac{R}{P} = \frac{1}{\varrho T} = \frac{1}{273\, \varrho_0}$ auch ein Volumen $3{,}666 \cdot 4 \pi a^2 \gamma \frac{da}{dt} \cdot \frac{1}{273\, \varrho_0} \cdot T$. Die Geschwindigkeit, mit der das CO_2 von der Oberfläche abströmt, ist somit $u_0 = \frac{3{,}666}{273\, \varrho_0} \gamma T \frac{da}{dt}$ und der Faktor C in Gl. (10) $C = \frac{3{,}666}{273\, \varrho_0} = 6{,}83$. Hierin ist aber ϱ_0 die Normaldichte von CO_2, während oben ϱ_0 die Normaldichte von O_2 bedeutet. Diese Dichten verhalten sich aber wie die Molekulargewichte, also auch wie 3,666 : 2,666. Für Luft ist $1 + \frac{\mathfrak{P}}{P} = 1{,}208$.

eine im folgenden öfter benützte Beziehung, welche die Abhängigkeit des u_0 und damit auch die Verbrennungsgeschwindigkeit vom Radius des Teilchens und seiner Hülle bestimmt. Weiters wird

$$a\,da - \frac{1}{s}\,a^2\,da = \Delta\,B\,dt,$$

woraus sich durch die Integration

$$\frac{a^2}{2} - \int_0^a \frac{1}{s}\,a^2\,da = \Delta\,B\,\tau$$

die Brenndauer τ allgemein als

$$\tau = \frac{a^2}{2\,\Delta B} - \frac{1}{\Delta B}\int_0^a \frac{1}{s}\,a^2\,da \tag{13}$$

berechnet. Erst jetzt ist es nötig, über s und seine Abhängigkeit vom Teilchenradius a bestimmte Annahmen zu machen.

Durch Gl. (12) ist nämlich der durch die Konvergenz der Diffusionsströmung bedingte Einfluß der jeweiligen Teilchengröße $\left(\text{bzw. der Krümmung } \frac{1}{a}\right)$ sowie der Dicke der Hülle $s - a$ auf die Verbrennungsgeschwindigkeit $\frac{da}{dt}$ gegeben. Weiters ist aus Gründen der Kontinuität der Strömung $u_0 = u_s \frac{s^2}{a^2}$, also auch die radiale Geschwindigkeit auf der Oberfläche der Hülle durch

$$u_s = u_0 \frac{a^2}{s^2} = \Delta \frac{a}{s\,(s-a)} \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{p}\right) \tag{14}$$

bestimmt.

Zur Berechnung der Brenndauer nach Gl. (13) bedarf es aber noch einer dritten Beziehung, welche s mit a verknüpft und die Verhältnisse betrifft, unter denen die radiale Strömung auf der Oberfläche der Hülle in das umgebende Traggas des Kohlenstaubes verwirbelt wird. Bei der verwickelten Natur dieses Prozesses sind zunächst sehr verschiedene Annahmen möglich und kann nur der Vergleich mit der Erfahrung lehren, inwieweit die betreffende Annahme die tatsächlichen Verhältnisse wiederzugeben imstande ist. Es seien von diesen vielen Möglichkeiten hier nur einige kurz erwähnt:

1. Das Verwirbeln der radialen Strömung auf der Oberfläche der Hülle erfolgt so, daß $\frac{a}{s}\,(s-a) = \text{konst.} = k$ ist. Es wird dann nach Gl. (12) u_0 und die dem u_0 nach Gl. (10) proportionale Verbrennungsgeschwindigkeit von der Größe des Teilchens unabhängig sein. Man erhält $\tau = \frac{C\,\gamma\,T}{u_0} \cdot a = \frac{a}{\frac{da}{dt}}$, wie das auch aus Gl. (13) folgt, wenn man $\frac{1}{s} = \frac{a-k}{a^2}$ setzt. In einem $a\,\tau$-Diagramm würde dieser Zusammenhang durch eine vom Ursprung ausgehende Gerade dargestellt, deren Richtungskoeffizient der hier konstanten Verbrennungsgeschwindigkeit entspräche.

2. Es sei $s - a = \text{konst.} = k$, d. h. die Dicke der das Teilchen umgebenden Hülle von der Größe des Teilchens unabhängig. Jetzt wird nach Gl. (12)

$$u_0 = \frac{\Delta}{k} \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{p}\right) \cdot \frac{s}{a}$$

und

$$u_s = \frac{\Delta}{k} \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{p}\right) \cdot \frac{a}{s},$$

was wegen $s = a + k$ auch in der Form

$$u_s = \frac{\Delta_s}{k} \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{p}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{a}}$$

geschrieben werden kann. Für $a \gg k$ wird u_s konstant. Weiters ist:

$$\int_0^a \frac{1}{s} a^2\, da = \int_k^{a+k} \frac{1}{s}(s^2 - 2ks + k^2)\, ds = \left| \frac{s^2}{2} - 2ks + k^2 \ln s \right|_k^{a+k}$$

und

$$\tau = \frac{a^2}{2\,\Delta B} - \frac{1}{\Delta B}\left\{\frac{a^2}{2} - ka + k^2 \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta B}\left\{ka - k^2 \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right)\right\} = \frac{k^2}{\Delta B}\left\{\frac{a}{k} - \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right)\right\}. \qquad (15)$$

3. Nimmt man an, daß das Verwirbeln der Hülle dort vor sich geht, wo die radiale Geschwindigkeit einen bestimmten Wert unterschreitet, so muß

$$u_s = \Delta \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{p}\right) \cdot \frac{a}{s(s-a)}$$

diesen bestimmten Wert aufweisen, was zutrifft, wenn $\frac{s(s-a)}{a} = \text{konst.} = k$ ist. Es wird dann

$$u_0 = \Delta \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{p}\right) \cdot \frac{s}{a(s-a)} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{a^2}{2\,\Delta B} - \frac{1}{\Delta B\, k}\int_0^a a(s-a)\, da,$$

was in geschlossener Form integriert werden kann.

4. Das brennende Kohleteilchen fällt wesentlich im Kohlendioxyd, das es um sich entwickelt, also relativ zur Luft mit einer Geschwindigkeit, die nach Stokes $w = \frac{2}{9}\frac{a^2 \gamma g}{\eta_{CO_2}}$ beträgt. Hierbei hat η_{CO_2}, die innere Reibung des Kohlendioxyds, bei der hohen Temperatur, die in der Hülle herrscht, einen mehrfach höheren Wert als die innere Reibung in der kalten Luft. Wir vernachlässigen dabei den Einfluß des durch die Hülle diffundierenden Sauerstoffs auf deren Temperatur und innere Reibung. Wie noch weiter ausgeführt werden wird, ist infolgedessen die Fallgeschwindigkeit des brennenden Teilchens selbst bei gleicher Größe um vieles kleiner als die der noch nicht entzündeten Kohleteilchen. Wieder wollen wir aber annehmen, daß der Radius der Hülle s sich beim Abbrand jeweils so einstellt, daß $u_s = u_0 \frac{a^2}{s^2}$ dieser Fallgeschwindigkeit gerade gleich wird. Aus

$$\frac{2}{9}\frac{a^2 \gamma g}{\eta_{CO_2}} = u_0 \frac{a^2}{s^2}$$

folgt zunächst, daß u_0 dem s^2 proportional ist, also u_s dem a^2; weiters aus Gl. (12)

$$\frac{2}{9}\frac{\gamma g}{\eta_{CO_2}} = \frac{\Delta \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{P}}{p}\right)}{a\,s\,(s-a)},$$

so daß sich hier $a\,s\,(s-a) = \text{konst.} = k$ ergibt. Ferner wird das Integral in Gl. (13)

$$\int_0^a \frac{1}{s} a^2\, da = \frac{1}{k}\int_0^a a^3 (s-a)\, da = \frac{1}{k}\int_0^a \left\{a^3 \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{k}{a}} - \frac{a^4}{2}\right\} da,$$

was nur näherungsweise berechnet werden kann.

Da wir die systematische Prüfung dieser und anderer Ansätze an den über Brennzeiten vorliegenden Erfahrungen derzeit schwer vornehmen können, wollen wir uns hier mit dem Nachweis begnügen, daß schon die zweite, noch recht einfache Annahme ($s - a = \text{konst.}$) eine für unsere weiteren Betrachtungen zureichende Darstellung der Versuchsergebnisse zu liefern vermag. Wir beziehen uns hierbei auf die Rechnungen von Nusselt, wie sie Gumz[2] weiter entwickelt hat, da wir durch sie, gleichgültig ob die Vorstellungen, auf denen sie beruhen, mit den hier entwickelten übereinstimmen oder nicht, jedenfalls zu Ausdrücken gelangen, die mit den bisherigen Erfahrungen

im Einklang stehen. Nusselt nimmt nämlich an, daß der Sauerstoff nicht durch reine Diffusion, sondern hauptsächlich konvektiv, also wirbelnd, bis auf die Oberfläche des Kohleteilchens gelangt, so daß die von ihm für den Wärmeübergang mit großem Vorteil benutzten Ähnlichkeitsbetrachtungen auch auf den nach diesen Vorstellungen rechnerisch ganz analogen Fall eines Stofftransportes Anwendung finden können. Hiernach wäre allerdings ein mit wirbelfreier, radialer Strömung ausgefüllter, das brennende Teilchen umhüllender Diffusionsraum überhaupt nicht vorhanden.

Unter der Annahme des theoretischen Luftbedarfes wird [l. c. S. 29, Gl. (55)] die Brenndauer eines Kohlekügelchens vom Halbmesser a und der Dichte γ zu $\tau = 172{,}4\,\frac{\gamma \cdot \nu^{0{,}15} \cdot a^{1{,}85}}{T\,(w^{0{,}15})_m}$ Sekunden angegeben. Hierin ist $(w^{0{,}15})_m$ der über die ganze Brennzeit genommene Mittelwert der 0,15ten Potenz der Schwebegeschwindigkeit w des Teilchens in Luft oder Rauchgas von 1000 bis 1500° C, der für verschiedenes γ einem Diagramm zu entnehmen ist; desgleichen einem zweiten Diagramm der Quotient $\nu^{0{,}15}/T$, in dem ν die kinematische Zähigkeit des Traggases und T seine absolute Temperatur bedeutet. Für großen Luftüberschuß, wie wir ihn bisher immer vorausgesetzt haben, wird τ aber viermal kleiner, verwandelt sich also die Konstante 172,4 in 43,1.

Im Anschluß an das von Gumz auf S. 33 gegebene Zahlenbeispiel wurden so zunächst für eine Reihe von Kügelchen vom anfänglichen Radius a mit $T = 1473°$ und $\gamma = 1200\ \mathrm{kg/m^3} = 1{,}2\ \mathrm{g/cm^3}$ die Brenndauern berechnet und in die zweite Reihe der folgenden Zahlentafel 2 eingetragen, während die dritte Reihe die nach Gl. (15) mit $k = 0{,}014$ cm erhaltenen Werte wiedergibt. Der Diffusionskoeffizient Δ des Sauerstoffs im Flammengas der Kohle wurde abermals gleich 3 cm²/s angenommen und für $B = \frac{1}{C\gamma T} \ln 1{,}208$ sein Wert $1{,}565 \cdot 10^{-5}$ eingesetzt.

Zahlentafel 2.

a in cm	0,005	0,010	0,015	0,02	0,03	0,04	0,05
τ nach Nusselt-Gumz ..	0,24	0,72	1,36	2,12	4,04	6,28	8,83
τ nach Gl. (15)	0,22	0,73	1,43	2,26	4,16	6,29	8,57
Differenz in Prozenten....	−10,4	+1,1	+5,0	+6,6	+3,2	+0,3	−3,0

Wenn auch die der letzten Horizontalreihe zu entnehmenden prozentuellen Abweichungen erkennen lassen, daß Gl. (15) den Gang nur ungefähr wiedergibt, so ist es doch sehr auffallend, daß von dem nur beiläufig bekannten Diffusionskoeffizienten abgesehen, eine einzige Konstante genügt, um solche den beobachteten doch recht naheliegende Werte für die Brenndauern zu erhalten und daß diese Konstante $k = 0{,}014$ cm in ihrer Größe ganz den Vorstellungen entspricht, auf Grund deren sie eingeführt wurde. Man wird annehmen müssen, daß der das brennende Kohleteilchen umgebende Diffusionsraum eine Dicke von nur Zehnteln Millimeter aufweist. Der Ansatz, daß $s - a$ einen vom jeweiligen Halbmesser des verbrennenden Teilchens unabhängigen Wert hat, wäre also dahin zu deuten, daß zufolge der Konvergenz der Diffusionsströmung die Geschwindigkeit u_0, mit der das Verbrennungsprodukt abströmt, mit wachsender Krümmung um so viel größer wird, daß die Dicke der umgebenden Hülle trotz kleiner werdenden Radius ungefähr erhalten bleibt.

Für kleinste Teilchen ($s \gg a$) wird das auch die beiläufige Konstanz des s, also des Halbmessers der Hülle bedeuten.

2. Die Zündung von Kohleteilchen in turbulent bewegter Luft.

Jedes Kohleteilchen wird an einer Spitze oder Kante zu brennen beginnen. Von dort schreitet die Entzündung über die Oberfläche und die Verbrennung in das Innere

des Teilchens weiter. Falls man von dem Sauerstoff absehen kann, der an der Oberfläche des Teilchens adsorbiert ist, wird der nötige Sauerstoff der umgebenden Luft durch den Diffusionsprozeß entnommen, den wir im vorhergehenden hinreichend beschrieben haben. Die sich entwickelnden Flammengase strömen hierbei zunächst einseitig ab und bringen das Teilchen durch Rückstoß in entgegengesetzter Richtung in Bewegung, vor allem aber auch in Rotation. Der im Sonnenlicht „tanzende" Staub bewegt sich und er flimmert, weil er sich lebhaft dreht, obwohl die Temperatur kaum erhöht ist. Durch die Verbrennung wird diese Eigenbewegung der Teilchen aber wesentlich gesteigert. Das hat J. Gasterstädt[6] durch Funkenaufnahmen nachgewiesen. Diese Drehbewegung bewirkt, daß hinreichend homogene Teilchen kugelförmig abbrennen.

Weiters nehmen wir wieder an, daß die Entzündung des Kohleteilchens zufolge der ihr vorausgehenden Entgasung so rasch über die ganze Oberfläche des Teilchens erfolgt, daß der Zeitbedarf dieser Entzündung gegenüber der Brenndauer des Teilchens vernachlässigt werden darf (W. Gumz, l. c. S. 35 oben und Fußnote).

Während sich nun die noch nicht entzündeten Teilchen, großen Luftüberschuß vorausgesetzt, mit der ihrer Größe und Masse entsprechenden Fallgeschwindigkeit w relativ zu dem fast aus reiner Luft von Raumtemperatur bestehenden Traggas bewegen, fallen die brennenden Teilchen in dem von ihnen selbst entwickelten, vornehmlich aus Kohlendioxyd bestehenden Flammengas bei der im letzteren herrschenden hohen Temperatur. Nach Stokes ist diese Fallgeschwindigkeit der Zähigkeit η des betreffenden Gases verkehrt proportional.

Nun ist bei 0° C $\eta_{\text{Luft}} = 0{,}00017$ und $\eta_{CO_2} = 0{,}000138$ g/cm · s. Dagegen nach Sutherlands Formel für die Temperaturabhängigkeit des η das η_{CO_2} bei 1200° C gleich 0,000538 g/cm · s, also mehr denn dreimal so groß, als η_{Luft} bei 0° C. Das brennende Teilchen bewegt sich also, gleiche Größe vorausgesetzt, nur mit einem Drittel derjenigen Geschwindigkeit, welche die noch nicht entzündeten Kohleteilchen relativ zur Umgebung aufweisen. Dazu kommt die den Fall hemmende Wirkung, welche das in der $3^1/_2$mal dichteren Luft aufsteigende erhitzte Kohlendioxyd auf das brennende Teilchen ausübt. Vor allem aber wird das Teilchen mit fortschreitendem Abbrand kleiner, was seine Fallgeschwindigkeit quadratisch erniedrigt; bei einem Abbrand auf den Mittelwert $\frac{a_0}{2}$ auf ein Viertel des anfänglichen Betrages.

So werden wir nicht weit fehlgehen, wenn wir für die folgenden Überlegungen voraussetzen, daß die brennenden Teilchen mit ihrer Hülle relativ zum umgebenden Traggas so gut wie ruhen, während sich die noch nicht entzündeten Kohleteilchen, deren Radius a_0 sich nicht verändert, mit der Geschwindigkeit w bewegen, wie sie etwa aus der Stokesschen Formel $w = \frac{2}{9} \cdot \frac{a_0^2 \gamma g}{\eta}$ berechnet wird.

Es ist dann die Zahl der von einem brennenden Teilchen im Zeitelement dt entzündeten Teilchen

$$d\zeta = s^2 \pi \cdot w \cdot n \, dt, \tag{16}$$

wo n die Zahl der im cm³ vorhandenen Teilchen, die „Staubzahl", bezeichnet; denn es werden alle Teilchen gezündet werden, welche die mit dem hoch erhitzten Verbrennungsprodukt und mit dem eindiffundierenden Sauerstoff gefüllte kugelförmige Hülle vom Querschnitt $s^2 \pi$ berühren. Setzen wir nach der in Gl. (15) gemachten Annahme $s = k + a$, wo k die Dicke der Hülle bedeutet, so ist die Anzahl der von einem Teilchen der Größe a sekundlich bewirkten Zündungen (sein „Zündungsvermögen")

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\pi}{9} \frac{\gamma g}{\eta} n a_0^2 (k + a)^2, \tag{17}$$

woraus die Zahl ζ der von einem einzelnen Teilchen während seiner ganzen Brenn-

dauer getätigten Zündungen (seine „Zündungszahl") durch Integration zu ermitteln ist. Aus Gl. (15) folgt zunächst

$$dt = \frac{1}{\Delta B} \cdot \frac{k\,a}{k+a} \cdot da$$

und

$$\frac{d\zeta}{da} = \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{dt}{da} = \frac{2\pi}{9} \frac{\gamma g}{\eta} n a_0^2 (k+a)^2 \cdot \frac{1}{\Delta B} \cdot \frac{k\,a}{k+a} = \frac{2\pi\gamma g}{9\eta\Delta B} n a_0^2 (k+a)\, k\, a =$$

$$= K n a_0^2 k (a^2 + k a), \tag{18}$$

wo $\frac{2\pi\gamma g}{9\eta\Delta B} = K$ geschrieben wurde. Die Integration gibt:

$$\zeta = K n a_0^2 k \left\{\frac{a_0^3}{3} + \frac{k a_0^2}{2}\right\} = K n k a_0^4 \left\{\frac{a_0}{3} + \frac{k}{2}\right\}. \tag{19}$$

Es wird z. B. mit $\gamma = 1{,}2$ g/cm³, $g = 981$ cm/s², $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ g/cm · s, $\Delta = 3$ cm²/s und $B = 1{,}565 \cdot 10^{-5}$ die Konstante $K = 1{,}03 \cdot 10^{11} \cdot$ l/cm³. Setzen wir k wieder gleich 0,014 cm, so berechnet man die Zündungszahl für ein Teilchen vom Radius 0,005 cm zu $7{,}81 \cdot 10^{-3} \cdot n$ und für ein Teilchen vom Radius 0,05 cm zu $213 \cdot n$.

Besser überblickt man dieses Verhalten, wenn man statt der Staubzahl n die Kohlenmenge β einführt, die das Staub-Luft-Gemisch in der Raumeinheit enthält. Wegen $\frac{4}{3} a_0^3 \pi \gamma \cdot n = \beta$ verwandelt sich Gl. (19) in

$$\zeta = \frac{1}{18} \frac{g\,k}{\eta\,\Delta B} \beta \left(a_0^2 + \frac{3}{2} k\, a_0\right) = K' \beta \left(a_0^2 + \frac{3}{2} k\, a_0\right).$$

Für $\beta = 100$ g/m³ $= 1 \cdot 10^{-4}$ g/cm³, wo noch Luftüberschuß vorhanden ist — es können 112 g Kohlenstoff im m³ Luft vollständig verbrennen —, sind in der nebenstehenden Zahlentafel 3 für eine Reihe willkürlich angenommener Zündungszahlen die Radien, die Staubzahlen und die Brenndauern der Teilchen angegeben, die diesen Zündungszahlen entsprechen.

Zahlentafel 3.

	ζ	5	10	25	50
$\beta = 100$ g/m³	$a_0 \cdot 10^2$ cm	1,45	2,32	4,15	6,24
	n l/cm³	6,52	1,53	0,28	0,08
	τ in Sek.	1,36	2,90	6,63	10,52

Trotz der geringeren Zahl von Zündungen, die das einzelne Teilchen bewirkt, verbrennt aber feinkörniger Staub natürlich rascher als grobkörniger, da für den feinen Staub die Brenndauer entsprechend kleiner und die Staubzahl viel größer ist.

Auch die Gl. (17) und (18) mögen durch ein Beispiel illustriert werden:

Wir setzen wieder $\beta = 100$ g/m³ und wählen die Staubzahl $n = 5$. Es wird dann $a_0 = 1{,}58 \cdot 10^{-2}$ cm und ergibt sich mit den obigen Werten von γ, η und k das Zündungsvermögen $\frac{d\zeta}{dt} = M (k+a)^2 = 6072\,(0{,}014 + a)^2$. Hierin ist $M = \frac{2\pi}{9} \frac{\gamma g}{\eta} n a_0^2 = \frac{1}{18} \frac{\gamma g}{\eta} n \cdot 4\pi a_0^2$, also der freien Oberfläche des Staubes proportional. Ein einzelnes brennendes Teilchen im sonst noch nicht brennenden Staub wird während des Abbrandes infolge der Abnahme seiner wirksamen Oberfläche $4\pi s^2 = 4\pi (0{,}014 + a)^2$ die der dritten Spalte der folgenden Zahlentafel 4 zu entnehmende Verminderung seines Zündvermögens aufweisen.

Weiters enthält die Tabelle in der vierten Spalte die aus den Gl. (10), (11) und (12) berechnete Verbrennungsgeschwindigkeit $\frac{da}{dt} = \Delta B \frac{k+a}{k\,a}$ und in der fünften $\frac{d\zeta}{da} = \frac{d\zeta}{dt} \Big/ \frac{da}{dt}$, also das Zündvermögen, jedoch nicht auf die Zeit-, sondern auf die Längeneinheit bezogen. Durch 1000 dividiert, geben also diese Zahlen an, wieviel Zündungen das brennende Teilchen ausführt, während es um $^1/_{1000}$ cm abbrennt.

Man erkennt die Zunahme der Verbrennungsgeschwindigkeit und die Abnahme des Zündungsvermögens mit kleiner werdendem Radius. Dabei verteilen sich die

Zündungen nicht gleichmäßig über die ganze Brenndauer von 1,56 s oder den ganzen Brennweg von $1{,}58 \cdot 10^{-2}$ cm. Es erfolgen im ersten Viertel des Brennweges oder der Brennzeit rund die Hälfte aller Zündungen.

Zahlentafel 4.

$a \cdot 10^2$	$a^2 \cdot 10^4$	$\frac{d\zeta}{dt}$	$\frac{da}{dt} \cdot 10^3$	$\frac{d\zeta}{da}$	Brennzeit in sek	
1,58	8,91	5,41	6,32	856	0	
1,4	7,84	4,76	6,71	709	0,275	
1,2	6,76	4,10	7,27	564	0,56	$\beta = 100$ g/m³
1,0	5,76	3,50	8,05	435	0,82	$\zeta = 5{,}51$
0,8	4,84	2,94	9,22	319	1,06	$\tau = 1{,}56$ s
0,6	4,00	2,43	11,2	217	1,26	
0,4	3,24	1,97	15,1	131	1,41	
0,2	2,56	1,55	26,8	58	1,52	
0	1,96	1,19	∞	0	1,56	

Untersuchen wir nun im folgenden die Ausbreitung der Entzündung in einer mit Kohleteilchen und Luft gefüllten Brennkammer. Hierbei bemerken wir nochmals ausdrücklich, daß wir sehr lebhafte Bewegung der die Teilchen tragenden Luft voraussetzen. Die Zündung soll nicht wie das in ruhender Luft der Fall wäre, von einer einzigen Stelle ausgehen. Vielmehr wird vorausgesetzt, daß die vorhandenen Wirbel die brennenden Teilchen rasch durch die ganze Brennkammer verteilen. Trotzdem wird bei grobballiger Turbulenz für die Zahl der Zündungen, die ein einzelnes Teilchen bewirkt, auch hier nur die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Teilchen und seiner unmittelbaren Umgebung maßgebend sein. Auf den Grad der Turbulenz kommt es wenig an. Der Wert, den ζ annimmt, wird vor allem durch die Fallgeschwindigkeit der noch nicht gezündeten Kohleteilchen bestimmt; Fallgeschwindigkeit und Eigenbewegung der schon brennenden Teilchen spielen ihr gegenüber eine untergeordnete Rolle. Nur sehr feinballige Turbulenz könnte ζ noch weiter steigern. Wir betrachten jetzt zwei Grenzfälle:

A. Die Teilchen seien klein genug, die Brenndauer τ des Einzelteilchens so kurz, daß ihr gegenüber die Zeit, die das ganze Gemisch zu seiner Entzündung braucht, als lang erscheint.

Es sei V das Volumen der Brennkammer und $N = n\,V$ die Gesamtzahl der jeweils noch nicht gezündeten Teilchen, während $N_0 = n_0\,V$ die Gesamtzahl der Teilchen bedeute, die zu Anfang in der Brennkammer vorhanden sind. Die Zahl $\mathfrak{Z}_t$ der zur Zeit t schon verbrannten Teilchen wird dann auf Grund der folgenden Überlegung gefunden.

Das erste zur Zeit 0 gezündete Teilchen ist zur Zeit τ verbrannt ($\mathfrak{Z}_\tau = 1$). Es hat zwischen 0 und τ im Mittel ζ Teilchen gezündet; das erste frühestens zur Zeit 0, das letzte spätestens zur Zeit τ und diese ζ Teilchen werden zwischen τ und $2\,\tau$ verbrennen, also zur Zeit $2\,\tau$ alle verbrannt sein ($\mathfrak{Z}_{2\tau} = 1 + \zeta$). Jedes dieser ζ Teilchen zündet selbst wieder ζ Teilchen, das erste frühestens zur Zeit 0, das letzte zur Zeit $2\,\tau$, so daß zur Zeit $3\,\tau$ auch diese ζ^2 Teilchen alle verbrannt sind ($\mathfrak{Z}_{3\tau} = 1 + \zeta + \zeta^2$). Die ζ^2 Teilchen zünden ζ^3 Teilchen, das erste — sehr unwahrscheinlicher, aber grundsätzlich möglicher Weise — zur Zeit 0 und das letzte zur Zeit $3\,\tau$, so daß zur Zeit $4\,\tau$ sicher $\mathfrak{Z}_{4\tau} = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3$ Teilchen verbrannt sind usw.

$$\mathfrak{Z}_{z\tau} = 1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{z-1} = \frac{\zeta^z - 1}{\zeta - 1} \qquad (20)$$

gibt dann die Zahl der verbrannten Teilchen nach z-maliger Wiederholung dieses Spieles, also nach der Zeit $t = z\,\tau$. (Daß wir hierbei die zur Zündung eines Teilchens

nötige Zeit gegen seine Brenndauer vernachlässigen, sowie kleinere Unterschiede in Qualität und Größe der Teilchen und damit τ als genau gleich betrachten, wird beim Vergleich mit der Erfahrung zu beachten sein.) Doch könnten diese Werte für $\mathfrak{Z}_{2\tau}$, $\mathfrak{Z}_{3\tau}$ usw. auch schon vor den Zeiten 2τ, 3τ usw. so gut wie erreicht werden, wenn wir uns die überwiegende Zahl der ζ Zündungen, die jedes Teilchen veranlaßt, in dem ersten Teil seiner Brennzeit zusammengedrängt denken; ja, solange wir hinsichtlich der Verteilung der Zündungen über die Brenndauer des Einzelteilchens gar keine Annahme machen, wäre es grundsätzlich sogar möglich, daß das erste Teilchen alle ζ Teilchen zur Zeit 0 zündet und diese wieder sofort alle ζ^2 Teilchen usw., so daß die ganze Verbrennung schon zur Zeit τ vollendet wäre. Doch haben wir in Gl. (17) bereits einen Ausdruck kennengelernt, der die Streuung der Zündungen über die Brenndauer des Einzelteilchens beurteilen läßt. Danach sind die Zündungen zu Beginn wohl mehrmals häufiger als am Ende, aber über die ganze Brenndauer doch hinlänglich verteilt, um für ein Teilchen von bestimmter Anfangsgröße die Angabe eines mittleren Zündungsvermögens zuzulassen.

Werden im letzten Spiel alle vorhandenen Teilchen erschöpft, so kann man nach Gl. (20) zwischen dem „Anlauf" und dem eigentlichen Ablauf einer Kohlenstaubverbrennung (Verpuffung, Explosion) unterscheiden. Im Anlauf verbrennt noch wenig, so daß die Zahl N der nichtgezündeten Teilchen von der anfänglichen Zahl N_0 aller Teilchen in der Brennkammer noch nicht sehr verschieden ist und auch ζ einen beiläufig konstanten Wert besitzt. Erst nach dem vorletzten Spiel, also nach der Zeit $(z-1)\tau$ wird die Zündung so stürmisch, daß N rasch auf Null sinkt.

Es ist nämlich die Zahl der bis zum Zeitpunkt $(z-1)\tau$ verbrannten Teilchen $\mathfrak{Z}_{(z-1)\tau} = \frac{\zeta^{z-1}-1}{\zeta-1}$, dagegen die der später verbrannten Teilchen gleich ζ^{z-1}, so daß das Verhältnis zwischen diesen beiden Zahlen $q = \frac{\zeta^{z-1}(\zeta-1)}{\zeta^{z-1}-1}$ beträgt. Je nachdem die 1 schon gegen ζ oder erst gegen ζ^{z-1} vernachlässigt werden kann, liegt der Wert dieses Verhältnisses bei ζ oder bei $\zeta-1$. Es ist also die Zahl der im eigentlichen Ablauf der Verpuffung verbrannten Teilchen $\zeta-1$ bis ζ-mal so groß als die Gesamtzahl aller bis dahin, d. h. im ganzen Anlauf verbrannten Teilchen.

So war im letzten Beispiel die Anfangszahl der Teilchen von $1{,}58 \cdot 10^{-2}$ cm Radius gleich 5 je cm³, also in einem Brennraum von 1 m³ Inhalt gleich $5 \cdot 10^6$. Weiters ergab sich $\zeta = 5{,}51$ und $\tau = 1{,}56$ s. Aus $\frac{\zeta^z-1}{\zeta-1} = N_0$ berechnet man $z = 9{,}92$ und die Anlaufszeit $(z-1)\tau = 13{,}9$ s. Während dieser Anlaufzeit sind $0{,}91 \cdot 10^6$ Teilchen verbrannt; der Hauptteil von $4{,}09 \cdot 10^6$ Teilchen verbrennt aber erst im letzten Spiel.

Je größer das N_0 bei bestimmtem Kohlegehalt ist, je kleiner also die Teilchen sind, desto kleiner wird das ζ und desto größer das z, also die Zahl der Spiele, die bis zur raschen Verbrennung ablaufen müssen. Da aber zugleich das τ sinkt, bedeutet das doch keine Verlängerung der Anlaufzeit, wie man sich leicht überzeugt. Das Verhältnis q nimmt freilich ab und wird für $\zeta = 2$ nahezu Eins, so daß im Anlauf und Ablauf die gleiche Kohlenmenge verbrennt. Dennoch wird der Druckanstieg am Ende sehr groß sein können, da die zweite Hälfte der Kohle in weit kürzerer Zeit verbrannt wird als die erste.

Verzögerungszeiten zwischen Zündung und Explosion in der Größe von 10 s und darüber sind in den meisten explosiven Gasmischungen, besonders auch für Methan-Luft-Gemische beobachtet worden. An Kohlenstaub-Luft-Gemengen wurde unseres Wissens die Erscheinung noch nicht näher untersucht und ist in solcher Größe auch nur dann zu erwarten, wenn die Zündung, wie hier angenommen wurde, an einem einzigen Teilchen beginnen könnte. Das ist kaum zu erreichen. Werden aber anfangs

viele Teilchen gezündet, so fallen in Gl. (20) aus der Reihe die Anfangsglieder weg und erscheint die Anlaufszeit um vieles gekürzt.

Trägt man den durch Gl. (20) bestimmten Verlauf der Verbrennung in ein $N\,t$-Diagramm ein, so ergibt sich für das gegebene Beispiel ein in Abb. 1 dargestellter Verlauf, der in seinem plötzlichen Abfall und dem selbstverständlich damit verbundenen schlagartigen Druckanstieg allen Beobachtungen entspricht. So können wir als Ergebnis dieser Betrachtung feststellen, daß die Dauer der eigentlichen Verbrennung (Explosion) und die Brenndauer τ des einzelnen Kohleteilchens ungefähr gleiche Größe haben.

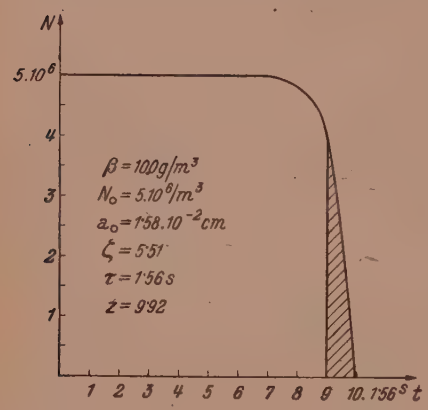

Abb. 1. Zahl der noch unverbrannten Kohleteilchen in Abhängigkeit von der Zeit bei feiner Körnung.

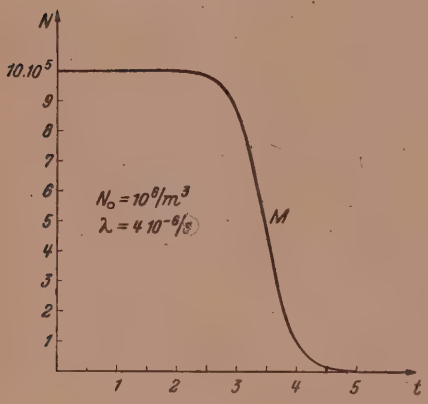

Abb. 2. Zahl der noch unverbrannten Kohleteilchen in Abhängigkeit von der Zeit bei gröber Körnung.

B. Die Teilchen seien so groß, ihre Brenndauer so lang, daß die Zeit, die der Hauptteil des ganzen Gemisches zu seiner Entzündung braucht, kürzer ist.

Bezeichnet wieder V das Volumen der Brennkammer und $N = n\,V$ die Gesamtzahl der jeweils noch nicht gezündeten Teilchen, während N_0 die Gesamtzahl der anfänglich vorhandenen Teilchen bedeutet, so gibt unter der gemachten Annahme $N_0 - N$ die Zahl der brennenden Teilchen. Wir können dann die Änderung des N in der Zeiteinheit $\left(-\frac{dN}{dt}\right)$, also die Zahl der Entzündungen je Sekunde einerseits der Zahl N der noch nicht gezündeten Teilchen, anderseits der Zahl $N_0 - N$ der brennenden Teilchen proportional setzen, wobei wir den Proportionalitätsfaktor λ als konstant behandeln. Faktisch wird er allerdings mit dem Abbrand der Teilchen kleiner werden. Wir rechnen also auch hier mit einem Mittelwert.

Das gibt

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda\,(N_0 - N)\cdot N \quad \text{und} \quad \frac{N_0 - N}{N} = C\,e^{\lambda N_0 t} \tag{21}$$

als das Verhältnis zwischen der Zahl der brennenden und der noch nicht gezündeten Teilchen.

Weiters ist $N = \dfrac{N_0}{1 + C\,e^{\lambda N_0 t}}$, wo C die Integrationskonstante bedeutet.

Rechnen wir die Zeit von dem Augenblick, in dem schon $\mathfrak{N}$ Teilchen brennen, so ist für $t = 0$, $N = N_0 - \mathfrak{N}$ und bestimmt sich die Konstante $C = \dfrac{\mathfrak{N}}{N_0 - \mathfrak{N}}$. Das gibt

$$N = \frac{N_0}{1 + \dfrac{\mathfrak{N}}{N_0 - \mathfrak{N}}\,e^{\lambda N_0 t}}. \tag{22}$$

Rechnen wir hingegen die Zeit vom Augenblick, in dem das erste Teilchen gezündet wurde, so ist

$$N = \frac{N_0}{1 + \dfrac{1}{N_0 - 1}\,e^{\lambda N_0 t}}. \tag{23}$$

Die diese Gleichung in der $N\,t$-Fläche darstellende Kurve (Abb. 2) verläuft wie im ersten Grenzfall zunächst parallel zur Abszisse. Es ist nach Gl. (17) $\dfrac{dN}{dt}$ für $N = N_0$ gleich Null und nach Gl. (18) der Ausdruck $\dfrac{\mathfrak{N}}{N_0 - \mathfrak{N}}\,e^{\lambda N_0 t}$, solange $\mathfrak{N}$ gegen N_0 klein bleibt, innerhalb einer von λ abhängigen Zeitspanne zu vernachlässigen. Hingegen

ist dieser Ausdruck am Ende des Zündungsvorganges sehr groß, so daß man die Eins streichen kann. Es wird $N = \frac{N_0}{C} e^{-\lambda N_0 t}$, erfolgt also der letzte Abfall nach einer Exponentiellen. Vorher liegt bei M ein Wendepunkt, in welchem die Zahl der Zündungen ein Maximum aufweist. Seine Koordinaten sind durch $N = \frac{N_0}{2}$, $t = \frac{1}{\lambda N_0} \ln (N_0 - 1)$ gegeben und die Zahl der Zündungen, auf die Sekunde bezogen, beträgt $-\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\max} = \lambda \frac{N_0^2}{4}$. Dort ist also die Zahl der brennenden Teilchen gleich der der noch nicht gezündeten.

Setzen wir z. B. die Zahl der in einem m³ anfangs vorhandenen Teilchen gleich 10^6 und nehmen wir weiters an, daß in M, also bei maximaler Zündungsgeschwindigkeit in der Sekunde 10^6 Teilchen gezündet werden, so ist $\lambda = 4 \cdot 10^{-6}$ und erhält die Kurve die in Abb. 2 gegebene Form. Die Entzündung tritt also nach einer Anlaufzeit von etwa 3 s in der vierten auch hier schlagartig ein und ist vor der fünften praktisch beendet. Doch werden die Verbrennung und die Druckentwicklung je nach Größe der Teilchen noch längere Zeit anhalten.

Wollen wir auch in diesem zweiten Grenzfall an der Voraussetzung festhalten, daß die Verbrennung bei Luftüberschuß stattfindet, so müssen wir, da die Teilchen groß sind und die Staubdichte nicht zu klein werden darf, annehmen, daß sie nicht in einem geschlossenen Gefäß, sondern in einem turbulenten Luftstrom vor sich geht, so daß der Sauerstoff ständig erneuert wird. Allerdings ist dann zu erwarten, daß durch die Bevorzugung einer bestimmten Strömungsrichtung der regelmäßige Ablauf der Erscheinung durch die verschiedene Fallgeschwindigkeit der brennenden und nichtbrennenden Teilchen gestört wird. Die brennenden Teilchen werden sozusagen herausgeblasen.

Man könnte diese Rechnungen ohne besondere Schwierigkeiten verfeinern und erweitern. Doch scheint es uns geraten, damit zu warten, bis sich die hier entwickelte Betrachtungsweise in den einschlägigen Gebieten der Praxis (Kohlenstaubfeuerung, Brand- und Explosionsverhütung im Betrieb und in der Grube) als nützlich erwiesen hat. Auch müssen vorher die theoretischen und experimentellen Grundlagen unserer Rechnungen in zwei Richtungen ergänzt werden.

Die eine betrifft die genauere Untersuchung des Zusammenhanges zwischen dem Radius (a) des brennenden Kohleteilchens und dem Radius (s) der umgebenden Hülle, in welcher das entwickelte Flammengas radial abströmt, während gleichzeitig der die Verbrennung unterhaltende Sauerstoff durch sie zur Oberfläche des Teilchens diffundiert. Unser Ansatz $s - a = \text{konst.}$ bedeutet nur eine erste Näherung.

Die zweite betrifft den Diffusionskoeffizienten des Sauerstoffs durch die hocherhitzten, vom brennenden Teilchen abströmenden Gase. Er ist nur der Größenordnung nach bekannt. Eine genauere Kenntnis dieses dem Versuch allerdings nicht leicht zugänglichen Koeffizienten ist aber im Hinblick auf die maßgebende Rolle, die er in unseren Betrachtungen spielt, für deren Fortführung nicht zu entbehren.

Literatur:

[1] D. F. Smith u. H. Gudmundsen: Mechanism of Combustion of Individual Particles of Solid Fuels. Ind. Engng. Chem. **23**, 277—285 (1931). — [2] W. Gumz: Theorie und Berechnung der Kohlenstaubfeuerungen, S. 51 u. 52. Berlin: Springer-Verlag 1939. — [3] H. A. Wilson: Philos. Mag. **24**, 118 (1912). — [4] F. J. Symon: Proc. Roy. Soc., Edinburgh **46**, 15 (1925). — [5] H. Mache: Philos. Mag. **47**, 724 (1924). — [6] J. Gasterstädt: Forsch.-Arb. Ing.-Wes, 265 (1924). — [7] Bone u. Townend: „Flame and Combustion in Gases", S. 66—69. London 1927.

(Eingegangen am 18. Februar 1946.)

Ein staubeigenes Fallgesetz.

Von **E. Feifel**, Wien.

Mit 9 Textabbildungen.

Einleitung.

Bei der Untersuchung eines Staubes auf Größe und Fallgeschwindigkeit seiner Teilchen pflegt die Unstetigkeit der Meßergebnisse dort, wo die Siebung von der Windsichtung abgelöst wird, als unvermeidlicher Schönheitsfehler der Staubkennlinien hingenommen zu werden.[1] Es wird gezeigt, daß an dieser Stelle die Rechnung anzusetzen hat, um die anfechtbarste, weil wirklichkeitsfremde Voraussetzung bekannter Fallgesetze, die Annahme der Kugelgestalt aller Teilchen, auszuschalten.

1. Die Kugelfallgesetze.

Die rechnerische Verfolgung eines Staubteilchens in seinem freien Fall durch ruhendes Gas — eine grundlegende Aufgabe der Staubtechnik — steht schon mit dem Ansatz der Gleichgewichtsbedingung an Hand des allgemeinen quadratischen Widerstandsgesetzes*

$$W = G$$

oder

$$\psi \gamma_l \frac{w^2}{2g} F = \gamma_s V \tag{1}$$

vor der ersten Schranke: Von g und γ_l abgesehen, bieten alle übrigen Größen dieser Gleichung als staubeigene Kennwerte der unmittelbaren Messung zum Teil unüberwindliche Schwierigkeiten. In erster Linie kann es sich angesichts der unendlichen Vielgestalt der Kornformen eines natürlichen Staubes nicht darum handeln, das einzelne Korn zu beschreiben und sein Schicksal zu verfolgen. Die Untersuchung wird vielmehr Teilchen mit irgendwelchem gemeinsamen Merkmal, z. B. mit gleicher Fallgeschwindigkeit w, zu Gruppen (Fraktionen) zusammenfassen und den Angehörigen solcher Gruppen im übrigen „mittlere" Eigenschaften zuschreiben.

Eine Gruppenbildung nach F oder auch nach $\frac{V}{F} = \alpha a$ ist meßtechnisch völlig ausgeschlossen. Nach der Gleichung

$$\frac{1}{\gamma_s} \frac{\psi}{\alpha} \frac{w^2}{a} = 2g \frac{1}{\gamma_l} \tag{1a}$$

kann deshalb der Formbeiwert α nicht selbständig, sondern nur in Verbindung mit dem Widerstandsbeiwert ψ für bestimmte Gruppen von $\frac{w^2}{\gamma_s a}$ ermittelt werden. Es

* Es ist

w die asymptotisch angestrebte Endgeschwindigkeit des Teilchens,
W der w entsprechende Widerstand, den das Teilchen seitens seiner flüssigen Umgebung erfährt,
G das Eigengewicht,
V das Volumen,
F der größte Querschnitt des Teilchens, senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung gemessen, der sogenannte Hauptspant,
a eine kennzeichnende Abmessung von F,
α ein „Formbeiwert" in $V/F = \alpha a$,
ψ der Widerstandsbeiwert,
g die Erdbeschleunigung,
γ_l die Gaswichte,
γ_s die Wichte des homogen vorausgesetzten Teilchens.

In Gas-Staub-Gemischen zeigt das Verhältnis γ_s/γ_l die Größenordnung 1000. Die im folgenden durchweg beibehaltene Näherung

$$\gamma_s - \gamma_l = \gamma_l \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_l} - 1 \right) \approx \gamma_s$$

läuft auf eine Vernachlässigung des statischen Auftriebs am Teilchen im Gas hinaus.

erscheint deshalb auch zweckmäßig, für den Wert $\frac{\psi}{\alpha}$ eine eigene Bezeichnung ψ_α als „Bremsbeiwert" einzuführen und der Einheitlichkeit halber auch für den Fall zu übernehmen, daß unter der Annahme kugelförmiger Staubteilchen der Formbeiwert bekannt ist:

$$\frac{V}{F} = \frac{\pi a^3 \cdot 4}{6 \pi a^2} = \frac{2}{3} a,$$

d. h.

$$\alpha_{\text{Kugel}} = \frac{2}{3}. \tag{2}$$

Als meßtechnisch erfaßbare, kennzeichnende Abmessung des Teilchens gilt üblicherweise die Maschenweite a, die bei der Siebung den Rückstand R vom Durchgang D der Staubprobe trennt. Die entsprechende Vorstellung einer Siebungsfraktion a vermittelt aber durchaus kein einheitliches Bild. Vielmehr können alle übrigen Größen — V, F, ψ, γ_s und w — innerhalb einer solchen Fraktion die verschiedensten Werte aufweisen, so daß ihnen wieder, um sie in Gl. (1) miteinander verknüpfen zu können, Mittelwerte zugeschrieben werden müssen. Es ist auch nicht zu übersehen, daß die Abmessung a eines Teilchens, dem bei der Siebung der Durchtritt durch die Maschenweite a eben noch glückte, nicht unbedingt den Hauptspant F kennzeichnen, d. h. keineswegs dem Querschnitt angehören muß, der z. B. bei der Windsichtung senkrecht zur Anströmrichtung steht, zumal das Teilchen in der wirbelnden Strömung keine Parallelverschiebung, sondern zweifellos eine wirbelnde Bewegung erfährt.

In ähnlicher Weise wird die Windsichtungsfraktion w wohl die Teilchen vereinigen, deren Fallgeschwindigkeit zwischen w und $w + \Delta w$ liegt, dabei aber keinerlei Aufschluß geben, welche Rolle die übrigen Werte V, F, γ_s, ψ und a im einzelnen spielen. Wenn dabei die Fallgeschwindigkeit w der Blasegeschwindigkeit gleichgesetzt wird, von der das Teilchen bei der Windsichtung ausgetragen wird, so liegt auch darin schon eine Mittelwertbildung, die alle Folgen einer wechselnden Einstellung in der Strömung ebenso ausgleicht wie die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den Blasrohrquerschnitt.

Aus der Problematik einer solchen Betrachtungsweise mit ihrer Unsicherheit für die zahlenmäßigen Grundlagen der Gl. (1) sucht die obenerwähnte weitgehende Annahme kugelförmiger Staubteilchen einen Ausweg. Diese idealisierende Annahme bedeutet für homogene Teilchen die weitere, daß sich in einer Siebungsfraktion zwischen den Maschenweiten a und $a + da$ nur Teilchen gleicher Fälligkeit, in einer Windsichtungsfraktion zwischen den Blasegeschwindigkeiten w und $w + dw$ nur solche gleicher Größe zusammenfinden, ja sogar, daß zwei durch das Fallgesetz [Gl. (1a)] verbundene Fraktionen der Siebung und der Windsichtung jeweils die gleichen Individuen enthalten.

Wie wirklichkeitsfremd diese Vorstellung ist, bedarf kaum eines Wortes. Sie ermöglicht aber im Gegensatz zum nicht kugelförmigen Korn dem einzelnen Staubteilchen vom Durchmesser a eine eindeutige Fallgeschwindigkeit w zuzuordnen und umgekehrt, so daß in

$$\frac{1}{\gamma_s} \psi_\alpha = 2 g \frac{1}{\gamma_l} \frac{a}{w^2} \tag{1b}$$

noch Staubwichte und Bremsbeiwert zu würdigen bleiben.

Der dem Wertepaar (a, w) oder der Reynoldsschen Zahl $R_e = \frac{a w}{\nu}$ (ν = kinematische Zähigkeit des Gases) zugehörige Widerstandsbeiwert ψ der Kugel ist Gegenstand umfangreicher experimenteller und theoretischer Forschung. So lassen sich z. B. die Ergebnisse zahlreicher Kugelfallversuche für $R_e < 400$ mit großer Genauigkeit in das Gesetz[2]

$$\psi_{\text{Kugel empir.}} = f(R_e) = \frac{24}{R_e} (1 + 0{,}13\, R_e^{0{,}7}) \tag{3}$$

einordnen, so daß

$$\psi_{\alpha\,\text{Kugel empir.}} = f(R_e) = \frac{36}{R_e}(1 + 0{,}13\,R_e^{0{,}7}). \tag{3a}$$

Wird dieser Wert in Gl. (1b) eingeführt, so folgt

$$w^{1{,}7} + 7{,}7\left(\frac{\nu}{a}\right)^{0{,}7} w - 0{,}427\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,\frac{a^{1{,}3}}{\nu^{0{,}3}} = 0, \tag{4}$$

eine Gleichung, die für Zahlenrechnungen zweckmäßig und zumeist durch den folgenden mittelbaren Zusammenhang zwischen a und w ersetzt wird:

$$w = \sqrt[3]{2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,\nu} \cdot \sqrt[3]{\frac{R_e}{\psi_{\alpha\,\text{Kugel empir.}}}} \tag{5}$$

mit

$$a = \frac{R_e\,\nu}{w}. \tag{6}$$

Immer aber bleibt die Verwertung der Ergebnisse der Kugelfallversuche in allgemeinen theoretischen Untersuchungen der Staubtechnik mit einer gewissen Unhandlichkeit behaftet.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Rechnung mit den theoretisch ermittelten Werten von

Stokes d. h.

$$\left.\begin{aligned} \psi_{\text{Stokes}} &= \frac{24}{R_e}, \\ \psi_{\alpha\,\text{Stokes}} &= \frac{36}{R_e} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder von

Oseen

$$\left.\begin{aligned} \psi_{\text{Oseen}} &= \frac{24}{R_e}\left(1 + \frac{3}{16}R_e\right), \\ \psi_{\alpha\,\text{Oseen}} &= \frac{36}{R_e}\left(1 + \frac{3}{16}R_e\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ihre Einführung in Gl. (1b) an Stelle von $\psi_{\alpha\,\text{Kugel empir.}}$ liefert die Kugelfallgesetze[3] von

Stokes

$$\frac{36\,\nu}{a}\,w - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,a = 0, \tag{9}$$

Oseen

$$\frac{27}{4}\,w^2 + \frac{36\,\nu}{a}\,w - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,a = 0, \tag{10}$$

die je nach Bedarf nach w oder a aufzulösen sind:

Stokes

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{1}{18}\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,\frac{g}{\nu}\,a^2, \\ a &= \sqrt{18\,\frac{\nu}{g}\,\frac{\gamma_l}{\gamma_s}\,w}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Oseen

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{8\,\nu}{3\,a} + \sqrt{\left(\frac{8\,\nu}{3\,a}\right)^2 + \frac{8}{27}\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,g\,a}, \\ a &= \frac{\frac{27}{8}\,w^2 + \sqrt{\left(\frac{27}{8}\,w^2\right)^2 + 72\,\nu\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,g\,w}}{2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Den allgemeinen, zugleich wünschenswert einfachen Einblick in Staubbewegungen vermittelt demnach in erster Linie die Stokessche Gleichung, etwa in der Form

$$a = \mathfrak{F}_{\text{Stokes}} \cdot w^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

mit

$$\mathfrak{F}_{\text{Stokes}} = \sqrt{18\,\frac{\nu}{g}\,\frac{\gamma_l}{\gamma_s}} \quad (\text{falls } a \text{ in cm}) \tag{13a}$$

oder

$$\mathfrak{F}_{\text{Stokes}} = 10^4\sqrt{18\,\frac{\nu}{g}\,\frac{\gamma_l}{\gamma_s}} \quad (\text{falls } a \text{ in } \mu). \tag{13b}$$

2. Unstetige Kennlinien.

Für Untersuchungen der Staubtechnik wird ein Staub üblicherweise durch seine Kennlinien $R = f(a)$ und $R = f(w)$ beschrieben, wobei R der gewichtsmäßige Anteil (Rückstand) einer Staubprobe ist, der auf einem Sieb mit der Maschenweite a zurückbleibt bzw. der bei der Blasegeschwindigkeit w aus dem Windsichter nicht mehr ausgetragen wird. In Abb. 1 sind die beiden Rückstandslinien mit gemeinsamem Achsennullpunkt zusammengefaßt.

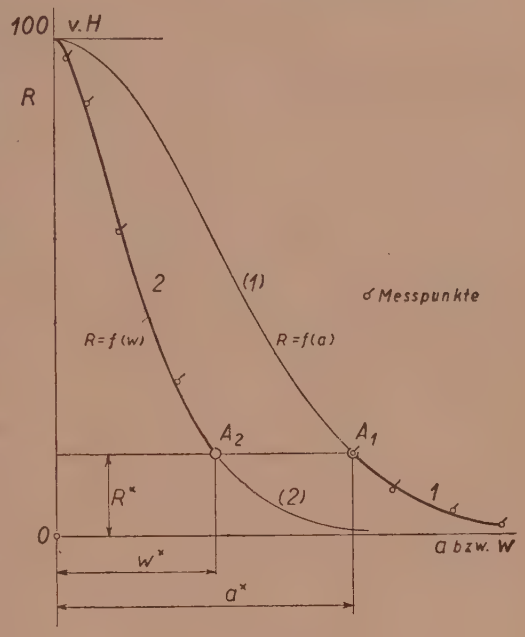

Abb. 1.

Sowohl der Siebung wie der Windsichtung sind Grenzen gezogen, die bei einer Grenzkorngröße a^* (praktisch zumeist $a^* = 60\ \mu$) zu einem Wechsel des Meßverfahrens zwingen. Unmittelbar aus der Messung werden daher nur die Kurvenzweige 1 und 2 gewonnen. Um — für jeweils gleiche Rückstände R — aus den Meßwerten von 1 die Fallgeschwindigkeiten von (2) und anderseits aus den Fallgeschwindigkeiten von 2 die Äquivalentdurchmesser von (1) zu errechnen, oder mit anderen Worten zur Verlängerung der Windsichtungskurve 2 in das Gebiet mit größeren Fallgeschwindigkeiten als $w^* = w|_{a=a^*}$ und der Siebungskurve 1 in das Gebiet der ideellen Maschenweiten $a < a^*$, wird nach der üblichen Betrachtungsweise eines der obigen Kugelfallgesetze herangezogen.

Dabei kann es nicht überraschen, daß die aus Meßverfahren ganz verschiedener Voraussetzungen hervorgehenden Linienzüge 1 und 2 bei ihrer rechnerischen Ver-

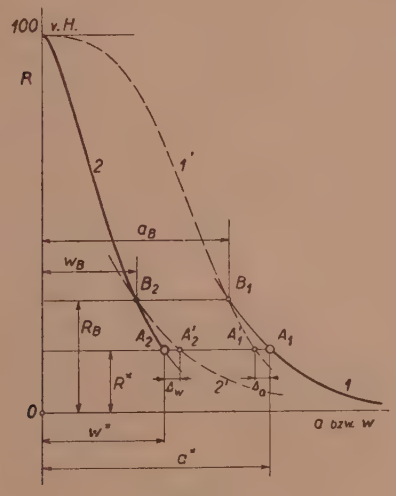

Abb. 2.

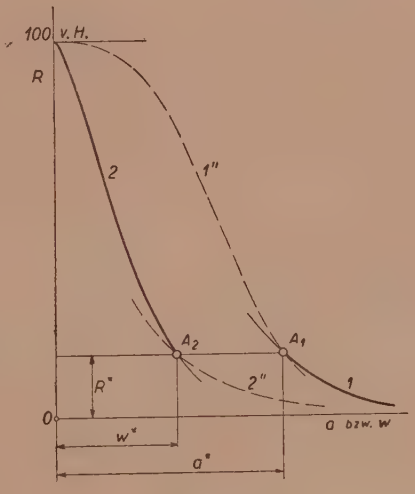

Abb. 3.

knüpfung durch ein Gesetz $a = f(w)$ im allgemeinen keine stetige Verlängerung nach (1) bzw. (2) wie in Abb. 1 erfahren. Der Wechsel des Meßverfahrens wird vielmehr an der Übergangsstelle, bei a^* oder w^*, Unstimmigkeiten Δa bzw. Δw (vgl.

Abb. 2), zumindest aber einen Neigungsbruch der Kennlinien (Abb. 3) zur Folge haben.

Die für den Ausscheidungsgrad einer hochwertigen Entstaubungsanlage maßgebenden Korngrößen bleiben im Gebiet der Windsichtung. Die Bedeutung der Unstetigkeitsstelle der Kennlinien mag deshalb z. B. im Zusammenhang mit Fragen der Zyklonentstaubung an sich zurücktreten. Der scheinbare „Schönheitsfehler" verdient aber nach anderer Seite zur Kennzeichnung des Staubes volle Beachtung; es wäre jedenfalls verfehlt, an der Übergangsstelle etwa einen graphischen Ausgleich zu versuchen.

3. Die Staubwichte γ_s.

Eine Untersuchung hinsichtlich der Staubwichte γ_s ist selbst dann nicht zu umgehen, wenn das spezifische Gewicht des homogenen Staubbildners bekannt ist, denn in den Fallbewegungen im Windsichter oder im Zyklon kommt ein Gewicht der Teilchen zum Ausdruck, das auch von ihrer etwaigen Inhomogenität infolge stofffremder Ein- und Anlagerungen beeinflußt ist.

Die Schwierigkeit einer einwandfreien Bestimmung der mittleren Wichte einer Staubprobe — von jener des Einzelkorns ganz zu schweigen — ist bekannt. Die Pyknometrierung, eine Volumen- und Gewichtsbestimmung, ist unabhängig von den Hauptabmessungen und von der Oberflächenbeschaffenheit der Teilchen. Es deckt sich aber ihr einzig eindeutiges Ziel, die „Reinwichte" des von anhängendem Gas völlig freien Staubteilchens, nicht unbedingt mit dem Wert, der im Windsichter oder im Zyklon das Verhalten der Teilchen gegenüber ihrer flüssigen Umgebung regelt, ohne daß erkennbar wäre, wie sich eine etwa anhängende Gashülle im Widerstandsbeiwert, in der Anströmfläche oder im Gewicht des Teilchens bemerkbar macht.

Es liegt hierin eine nicht zu unterschätzende Unsicherheit für die zahlenmäßigen Grundlagen von Gl. (1b) und gleichzeitig ein Anlaß zu dem Hinweis, daß aus den Ergebnissen einer sorgfältigen Siebung und Windsichtung eine mittlere „scheinbare" Staubwichte γ_s^* zu errechnen ist, die einen fehlenden Meßwert ersetzen kann oder zumindest zu überprüfen erlaubt. Der Rechnungsgang ist folgender:

Das Grenzwertepaar (a^*, w^*) ist stets als gegeben anzusehen, und zwar a^* als kleinste bei der Siebung verwendete Maschenweite, in der Regel also $a^* = 60\ \mu$, und w^* aus einer Extrapolation der Meßwerte der Windsichtung bis $R^* = R|_{a = a^*}$. Mit einem der Bremsbeiwerte für die Kugel, d. h. mit

$$\psi^*{}_{\alpha\,\text{Kugel}} = f\left(\frac{a^* w^*}{\nu}\right)$$

ergibt sich also aus Gl. (1b)

$$\gamma^*{}_s = \psi^*{}_{\alpha\,\text{Kugel}} \cdot \frac{1}{2\,g}\,\gamma_l \frac{w^{*2}}{a^*} \tag{14}$$

und damit die Möglichkeit, in Abb. 3 die in A_1 und A_2 anschließenden Zweige 1″ bzw. 2″ einzuzeichnen.

Es wird mit anderen Worten zugunsten der Bedingung $\Delta a|_{R^*} = 0$ bzw. $\Delta w|_{R^*} = 0$ eine Näherung hinsichtlich der Staubwichte in Kauf genommen, deren Grad an einem etwa vorliegenden pyknometrischen Wert γ_s ermessen werden kann, soweit einem solchen absolute Bedeutung zuzubilligen ist.

Aus dem Grad der mehr oder weniger vollkommenen Benetzung aller Staubteilchen bei der Pyknometrierung und aus der Art, wie sich etwa angelagertes Gas auf das Verhalten der Teilchen auswirkt, kann ein Anlaß sowohl zur positiven wie zur negativen Korrektur des pyknometrischen Wertes γ_s erwachsen, d. h. es kann $\gamma_s^* \gtrless \gamma_s$ sein. Dem Schleudervorgang in der Zyklonkammer darf aber der naturbelassene Zustand der Staubteilchen, wie er sich in der Windsichtung und im Wertepaar (a^*, w^*) ausdrückt, angemessener gelten als ihre restlose Befreiung von anhaftendem Gas.

Für $a^* = 60\ \mu$, für $\gamma_l = 1{,}20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{gcm^{-3}}$ (Luft 20° C; 760 mm Hg), ferner für $\nu = 0{,}149\ \mathrm{cm^2 s^{-1}}$ und $g = 981\ \mathrm{cms^{-2}}$ ist $\gamma_s{}^*$ für verschiedene Werte von w^* der Abb. 4 zu entnehmen, und zwar verschieden, je nachdem in Gl. (14) als Bremsbeiwert ψ^*_{Stokes}, ψ^*_{Oseen} oder $\psi^*_{\alpha\ \text{Kugel empir.}}$ eingeführt wird.

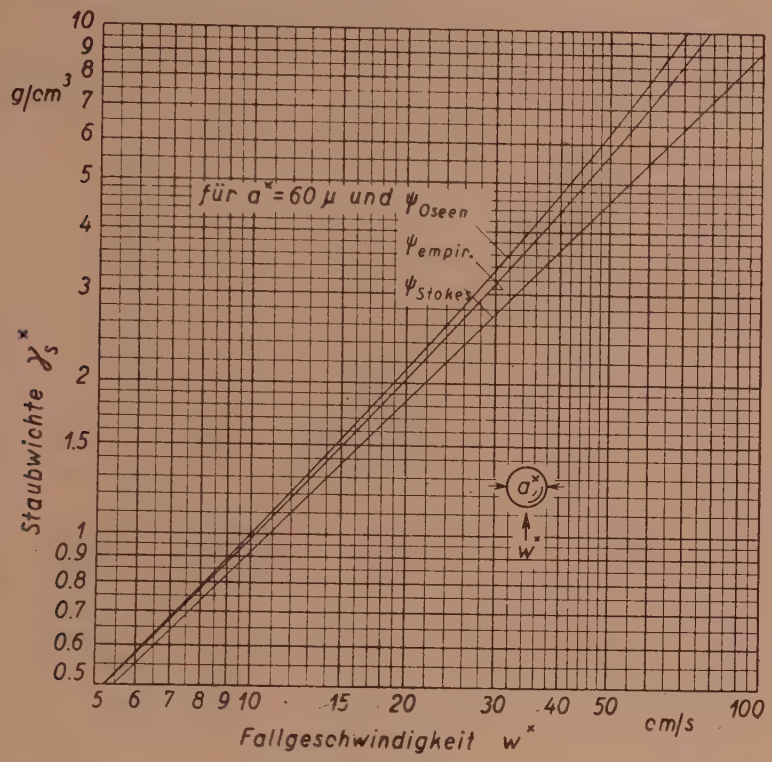

Abb. 4.

4. Das staubeigene Fallgesetz.

Es darf als bekannt vorausgesetzt werden,[4] daß Kennlinien von der Form Abb. 1 für viele Zwecke der Staubtechnik, auch für die Zyklonberechnung, mit hinreichender Treffsicherheit durch zwei dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz nachgebildete Exponentialfunktionen erfaßt werden können:

$$\left.\begin{aligned} R^{\%} &= 100\, e^{-x_1 a^{y_1}}\ (a \text{ in } \mu), \\ \text{und} \qquad R^{\%} &= 100\, e^{-x_2 w^{y_2}}\ (w \text{ in cm/s}). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Diesen Gleichungen liegt die Auffassung der Kennlinien als Wahrscheinlichkeitsverteilung, des Werdegangs des Staubes als eines Problems der Statistik zugrunde. Ihre Anpassungsfähigkeit an versuchsmäßig ermittelte Kornverteilungen, deren natürlicher Aufbau nicht absichtlich oder unabsichtlich durch Zumischung oder Entmischung gestört wurde, ist jedenfalls in dem maßgebenden Körnungsgebiet der Zyklonentstaubung erwiesen. Die Gleichungen erleichtern die allgemeine rechnerische Beantwortung zahlreicher Fragen der Staubtechnik, und sie entsprechen bei passender Wahl der Exponenten x und y auch den Anforderungen an die zahlenmäßige Genauigkeit.*

* Liegen neben dem selbstverständlichen Wert $R = 100\%$ für $a = 0$ bzw. für $w = 0$ noch zwei sorgfältig ermittelte Wertepaare

$$(a, R)_\alpha \text{ und } (a, R)_\beta$$

Aus den durch ein Kugelfallgesetz $a = f(w)$ verbundenen Kennlinien in Abb. 2 sind zwar durch die Einführung einer errechneten Staubwichte $\gamma_s{}^*$ die Unstimmigkeiten Δa und Δw an der Übergangsstelle der Meßverfahren auszumerzen. Aus dem verbleibenden Neigungsbruch (Abb. 3) in den Punkten A_1 und A_2 muß aber gefolgert werden, daß nur eine Richtigstellung des Fallgesetzes selbst, d. h. der Brücke zwischen der Körnungslinie $R = f(a)$ und der Fälligkeitslinie $R = f(w)$ zu dem im natürlichen Staub folgerichtig zu verlangenden stetigen Übergang wie in Abb. 1 führen kann.

Nun lehrt aber ein Blick auf Gl. (1b), daß lediglich noch der Bremsbeiwert ψ_α einer Richtigstellung zugänglich ist, daß mit anderen Worten die Unstimmigkeiten in Abb. 2 und 3 nur auf die idealisierende Annahme der Kugelgestalt aller Staubteilchen zurückgehen können: Der Wert $\psi_{\alpha\,\mathrm{Kugel}}$ ist durch einen staubeigenen Wert $\psi_{\alpha\,\mathrm{spezial}}$ zu ersetzen!

Wenn es umgekehrt gelingt, die Meßkurven 1 und 2 in Abb. 1 ohne eine Annahme hinsichtlich der Korngestalt stetig und wahrscheinlich über R^* hinaus zu verlängern, ist der Weg zu der staubeigenen Beziehung gegeben:

$$\frac{1}{\gamma_s}\,\psi_{\alpha\,\mathrm{spez.}} = 2\,g\,\frac{1}{\gamma_l}\,\frac{a}{w^2}. \tag{16}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt eine Verbindung von Widerstandsbeiwert, Korngestalt und Staubwichte dar, die auch in den Grundgleichungen der Zyklonberechnung wiederkehrt.[5] Es bestünde also an sich kein Anlaß zur Trennung dieser Verbindung. Mit ihrer Festlegung für jedes Wertepaar (a, w), d. h. für jede Siebungs- und Windsichtungsfraktion des betreffenden Staubes oder auch für jeden Rückstand, also mit

$$\frac{1}{\gamma_s}\,\psi_{\alpha\,\mathrm{spez.}} = f(R)$$

könnte die Staubanalyse für die Zwecke der Zyklonberechnung als ausgeschöpft gelten. Ist für gewisse Zwecke die Kenntnis von $\psi_{\alpha\,\mathrm{spez.}}$ selbst erwünscht, so setzt dies in Gl. (16) jene der Staubwichte voraus, die ihrerseits einer pyknometrischen Messung entstammen oder als scheinbare Wichte wie oben errechnet sein kann.

Nun ist aber mit den beiden Kenngleichungen (15) die Voraussetzung zusammengehöriger Werte von a und w für beliebige Rückstände zwischen 0 und 100% ohne irgendwelche Annahme bezüglich der Korngestalt erfüllt, und damit ist auch der rein rechnerische Weg zur Staubwichte $\gamma_s{}^*$ und zum staubeigenen Fallgesetz offen.

---

bzw. $(w, R)_\alpha$ und $(w, R)_\beta$

vor, so ist

$$y_1 = \frac{\lg(2 - \lg R_\alpha) - \lg(2 - \lg R_\beta)}{\lg a_\alpha - \lg a_\beta} \tag{a}$$

$$x_1 = \frac{2{,}303}{a_\alpha{}^{y_1}}\,(2 - \lg R_\alpha)$$

$$= \frac{2{,}303}{a_\beta{}^{y_1}}\,(2 - \lg R_\beta) \tag{b}$$

$$y_2 = \frac{\lg(2 - \lg R_\alpha) - \lg(2 - \lg R_\beta)}{\lg w_\alpha - \lg w_\beta} \tag{c}$$

$$= \frac{2{,}303}{w_\alpha{}^{y_2}}\,(2 - R_\alpha)$$

$$= \frac{2{,}303}{w_\beta{}^{y_2}}\,(2 - \lg R_\beta) \tag{d}$$

Zunächst folgt die Geschwindigkeit w^* an der Siebungsgrenze aus dem zu a^* gehörigen Rückstand R^*, d. h. aus

$$R^* = 100\, e^{-x_2 w^{*y_2}}$$

zu

$$w^* = \left(\frac{1}{x_2} \ln \frac{100}{R^*}\right)^{\frac{1}{y_2}} \tag{17}$$

oder aus

$$R^* = 100\, e^{-x_1 a^{*y_1}} = 100\, e^{-x_2 w^{*y_2}}$$

zu

$$w^* = \left(\frac{x_1}{x_2} a^{*y_1}\right)^{\frac{1}{y_2}}. \tag{18}$$

Sodann ist mit Hilfe von Gl. (11)

$$\gamma_s^* = 10^8 \cdot 18 \frac{\nu}{g} \gamma_l \frac{w^*}{a^{*2}}$$

auch die Staubwichte γ_s^* zu errechnen, die mangels eines pyknometrisch ermittelten Wertes allen weiteren Rechnungen zugrunde liegen kann oder einen etwaigen Meßwert überprüfen läßt.

Ein Eingehen auf die Staubwichte erübrigt sich, wenn das Interesse auf den kombinierten Wert $\frac{1}{\gamma_s}\ \psi_\alpha$ beschränkt bleibt. Denn aus dem Zusammenhang

$$x_1 a^{y_1} = x_2 w^{y_2}$$

folgt

$$\frac{a}{w^2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_1}} w^{\frac{y_2}{y_1}-2}, \tag{19}$$

$$= \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{2}{y_2}} a^{1-\frac{2y_1}{y_2}}, \tag{19a}$$

also in einer Abwandlung der Gl. (1b) (mit a in μ)

$$\frac{1}{\gamma_s} \psi_{\alpha\,\text{spez.}} = 2g \frac{1}{\gamma_l} \frac{10^{-4} a}{w^2}$$

entweder

$$= f(w) = 2g \cdot 10^{-4} \frac{1}{\gamma_l} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_1}} w^{\frac{y_2}{y_1}-2} \tag{20}$$

oder

$$= f(a) = 2g \cdot 10^{-4} \frac{1}{\gamma_l} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{2}{y_2}} a^{1-\frac{2y_1}{y_2}}. \tag{20a}$$

Ist dagegen γ_s gemessen oder γ_s^* errechnet, so ist auch $\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = f(a)$ bzw. $\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = f(w)$ selbst gegeben.

Zwischen Bremsbeiwert und Rückstand, d. h. für $\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = f(R)$, ergibt sich ein Zusammenhang, indem aus den Gl. (20) und (20a) die Größen a bzw. w mit Benutzung der Gl. (15) eliminiert und durch den Rückstand R ersetzt werden; es folgt jeweils:

$$\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = f(R) = 2g \cdot 10^{-4} \frac{\gamma_s}{\gamma_l} \left(\frac{1}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_1}} \left(\frac{1}{x_2}\right)^{-\frac{2}{y_2}} \left(\ln \frac{100}{R}\right)^{\frac{1}{y_1}-\frac{2}{y_2}}. \tag{21}$$

Besonders aufschlußreich endlich gestaltet sich eine Verbindung von $\psi_{\alpha\,\text{spez.}}$ zur Reynoldsschen Zahl R_e. Da

$$a = \left(\frac{1}{x_1} \ln \frac{100}{R}\right)^{\frac{1}{y_1}}$$

und

$$w = \left(\frac{1}{x_2} \ln \frac{100}{R}\right)^{\frac{1}{y_2}},$$

ist zunächst

$$R_e = \frac{10^{-4} a w}{\nu}$$

$$= \frac{10^{-4}}{\nu} \left(\frac{1}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_1}} \left(\frac{1}{x_2}\right)^{\frac{1}{y_2}} \left(\ln \frac{100}{R}\right)^{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}}. \tag{22}$$

Es folgt also durch Elimination von $\ln \frac{100}{R}$

$$\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = 2\,g \cdot 10^{-4\left(1+\frac{2y_1-y_2}{y_1+y_2}\right)} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\right) \nu^{-\frac{2y_1-y_2}{y_1+y_2}} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{3}{y_1+y_2}} R_e^{-\frac{2y_1-y_2}{y_1+y_2}} \tag{23}$$

oder

$$\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = \frac{A}{R_e^{\,n}} \tag{24}$$

mit

$$n = \frac{2y_1 - y_2}{y_1 + y_2} \tag{25}$$

und

$$A = 2\,g \cdot 10^{-4(1+n)} \frac{\gamma_s}{\gamma_l} \nu^{-n} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{3}{y_1+y_2}}. \tag{26}$$

An die Stelle der Kugelfallgesetze (mit a in cm)

empirisch $\quad \frac{36}{R_e}(1 + 0{,}13\,R_e^{0{,}7}) \quad w^2 - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,a = 0,$

Stokes $\quad \frac{36}{R_e} \quad \cdot w^2 - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,a = 0,$

Oseen $\quad \frac{36}{R_e}\left(1 + \frac{3}{16}\,R_e\right) \quad \cdot w^2 - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,a = 0$

kann somit — unter dem Vorbehalt einer Überprüfung seiner Gültigkeitsgrenzen — das staubeigene Gesetz treten (mit a in μ)

spezial $\quad \frac{A}{R_e^{\,n}} \cdot w^2 - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,(10^{-4}\,a) = 0. \tag{27}$

dessen nahe Verwandtschaft besonders zum Stokesschen Gesetz auch aus folgender Gegenüberstellung hervortritt:

Stokes $\quad 36\,\nu\,w - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,(10^{-4}\,a)^2 = 0,$

spezial $\quad A\,\nu^n\,w^{2-n} - 2\,g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_l}\,(10^{-4}\,a)^{1+n} = 0 \tag{28}$

oder

Stokes $\quad a = \mathfrak{F}_{\text{Stokes}}\; w^{\frac{1}{2}}$

mit

$$\mathfrak{F}_{\text{Stokes}} = 10^4 \left(\frac{36}{2}\,\frac{\nu}{g}\,\frac{\gamma_l}{\gamma_s}\right)^{\frac{1}{2}},$$

spezial

$$a = \mathfrak{F}_{\text{spez.}}\; w^{\frac{2-n}{1+n}} = \mathfrak{F}_{\text{spez.}}\; w^{\frac{u_2}{y_1}} \tag{29}$$

mit

$$\mathfrak{F}_{\text{spez.}} = 10^4 \left(\frac{A}{2}\,\frac{\nu^n}{g}\,\frac{\gamma_l}{\gamma_s}\right)^{\frac{1}{1+n}}. \tag{29a}$$

So anschaulich auch der Bremsbeiwert $\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = A/R_e^{\,n}$ in seiner Gegenüberstellung zum Stokesschen Wert $\psi_{\alpha\,\text{Stokes}} = 36/R_e$ ist, und so klar er das staubeigene Fallgesetz als Verallgemeinerung des Stokesschen Kugelfallgesetzes erkennen läßt, so unbequem ist er im Einzelfall für zahlenmäßige Untersuchungen. Wird dagegen A aus Gl. (26) und n aus Gl. (25) eingeführt, so ergibt sich entweder

$$a = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_1}} w^{\frac{y_2}{y_1}}, \tag{30}$$

oder

$$w = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{y_2}} a^{\frac{y_1}{y_2}}, \tag{31}$$

also zwei einfache Beziehungen zwischen Teilchengröße und Fallgeschwindigkeit, die auch unmittelbar aus den Gl. (15) abzulesen waren. Der Vergleich mit Gl. (29) läßt dann noch

$$\mathfrak{F}_{\text{spez.}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{y_1}} \tag{32}$$

erkennen.

5. Zahlenbeispiel.

Siebung und Windsichtung eines Braunkohlenstaubes ergaben*

einen Rückstand R von ..... %	0,4	2,0	5,2	8,4	13,2
mit einer Teilchengröße a ..... μ	$\leqq 200$	$\leqq 120$	$\leqq 90$	$\leqq 75$	$\leqq 60$
bzw.					
einen Rückstand R von ..... %	35,0	67,0	89,8	10,2	
mit einer Fallgeschwindigkeit w ..... cm/s	$\leqq 6{,}71$	$\leqq 1{,}68$	$\leqq 0{,}42$	$< 0{,}42$	

Die Staubwichte wurde pyknometrisch zu $\gamma_s = 1{,}4\ \mathrm{g/cm^3}$ ermittelt.

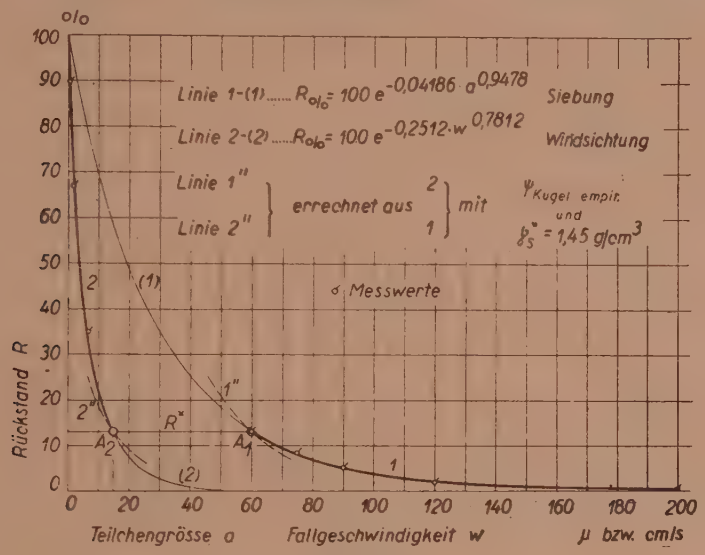

Abb. 5.

Die zeichnerische Mittelung der Meßwerte $R = f(a)$ und $R = f(w)$ in Abb. 5 läßt sich mit sehr guter Näherung durch die Gleichungen

$$R = 100\, e^{-0{,}04186\, a^{0{,}9478}}$$

bzw.

$$R = 100\, e^{-0{,}2512\ w^{0{,}7812}}$$

wiedergeben und als „wahrscheinliche" Kennlinien (1) bzw. (2) über den Rückstand $R^* = R|_{a\,=\,60\ \mu\,=\,a^*}$ hinaus verlängern. Es ist also

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}04186, \\ y_1 = 0{,}9478, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0{,}2512, \\ y_2 = 0{,}7812. \end{cases}$$

Für $a^* = 60\ \mu$ wird zunächst

$$R^* = 100\, e^{-0{,}04186\ \cdot\ 60^{0{,}9478}} = 13{,}16\,\%.$$

Weiterhin ist im Punkt A_2

$$\text{nach Gl. (17)}\quad w^* = \left(\frac{1}{0{,}2512}\ \frac{1}{0{,}4343}\ \lg\frac{100}{13{,}16}\right)^{\frac{1}{0{,}7812}} = 14{,}49\ \mathrm{cm/s},$$

$$\text{nach Gl. (18)}\quad w^* = \left(\frac{0{,}04186}{0{,}2512}\ 60^{0{,}9478}\right)^{\frac{1}{0{,}7812}} = 14{,}49\ \mathrm{cm/s}.$$

* Prüfungszeugnis B 2 A 3359 des Staatlichen Materialprüfungsamtes Berlin-Dahlem, vom 5. XII. 1938.

Die rechnungsmäßige Staubwichte γ_s^* kann hiermit der Abb. 4 entnommen oder aus Gl. (14) bestimmt werden, nachdem für

$$R_e^* = \frac{a^* w^*}{\nu} = \frac{10^{-4} \cdot 60 \cdot 14{,}49}{0{,}149} = 0{,}58$$

der zugehörige Beiwert $\psi_{\alpha\,\text{Kugel}}$ ermittelt wurde. Für

$$\psi_{\alpha\,\text{Stokes}} = \frac{36}{0{,}58} = 62{,}0 \text{ [s. Gl. (7)]}$$

oder

$$\psi_{\alpha\,\text{Oseen}} = \frac{36}{0{,}58}\left(1 + \frac{3}{16}\,0{,}58\right) = 69{,}0 \text{ [s. Gl. (8)]}$$

oder

$$\psi_{\alpha\,\text{empir.}} = \frac{36}{0{,}58}\,(1 + 0{,}13 \cdot 0{,}58^{0{,}7}) = 68{,}0 \text{ [s. Gl. (3a)]}$$

wird

$$\gamma_s^* = 1{,}33 \text{ g/cm}^3 = 0{,}95\,\gamma_s,$$
$$\gamma_s^* = 1{,}47 \quad ,, \quad = 1{,}05\,\gamma_s,$$
$$\gamma_s^* = 1{,}45 \quad ,, \quad = 1{,}03\,\gamma_s.$$

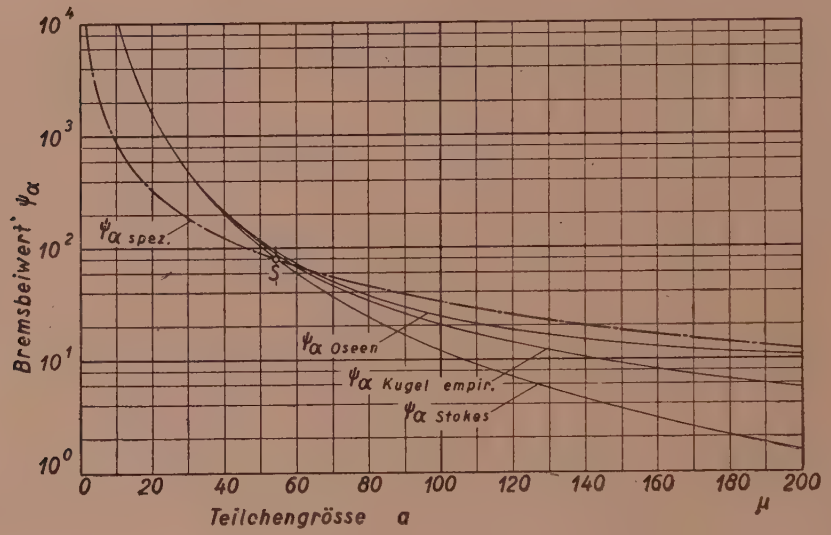

Abb. 6.

Solche Unterschiede zwischen berechneter und gemessener Staubwichte dürfen mit Rücksicht auf den Zweck der Untersuchung und auf die nicht zu übersehenden Fehlerquellen der Messung wohl als tragbar gelten.

Dagegen kann der Neigungsbruch der Kennlinien nicht befriedigen, wenn in Abb. 5 die Meßkurven zunächst mit Hilfe eines der Kugelfallgesetze nach 1″ bzw. nach 2″ verlängert werden. Für Abb. 5 ist hierzu die Gl. (5) verwendet.

Dieser Neigungsbruch verschwindet, die Linie 1 geht stetig in (1), die Linie 2 in (2) über, wenn an die Stelle von $\psi_{\alpha\,\text{Kugel empir.}}$ der staubeigene Wert tritt:

aus Gl. (20) $$\frac{1}{\gamma_s}\,\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = f(w) = 1077\,w^{-1{,}1758},$$

aus Gl. (20a) $$\frac{1}{\gamma_s}\,\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = f(a) = 16010\,a^{-1{,}4266} \text{ (vgl. Abb. 6).}$$

Ferner liefert

die Gl. (21) $$\psi_{\alpha\,\text{spez.}} = 195{,}5\left(\ln\frac{100}{R}\right)^{-1{,}5052} \text{ (vgl. Abb. 7),}$$

die Gl. (22) $$R_e = 0{,}1107\left(\ln\frac{100}{R}\right)^{2{,}3352},$$

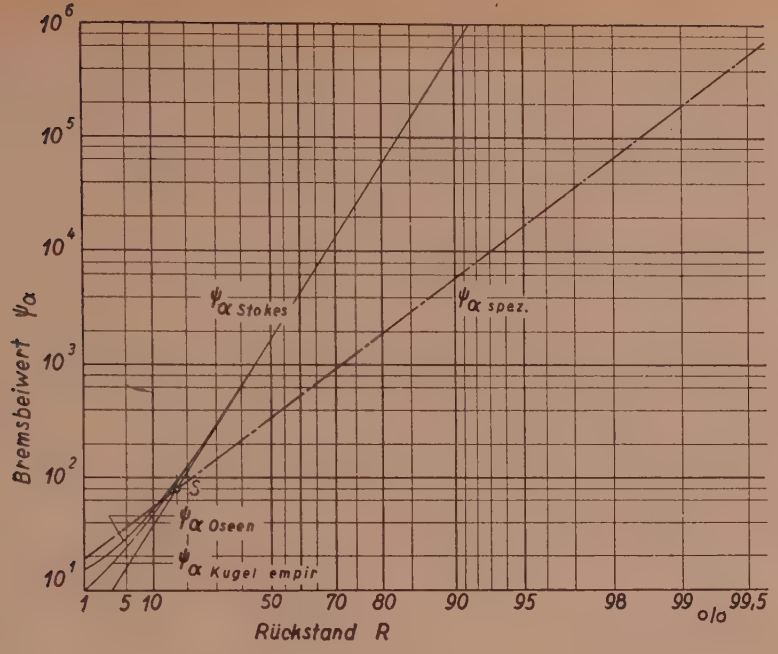
Bremsbeiwert ψ_α
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
$\psi_{\alpha\,Stokes}$
$\psi_{\alpha\,spez.}$
S
$\psi_{\alpha\,Oseen}$
$\psi_{\alpha\,Kugel\ empir}$
1 5 10 50 70 80 90 95 98 99 99,5 o/o
Rückstand R

Abb. 7.

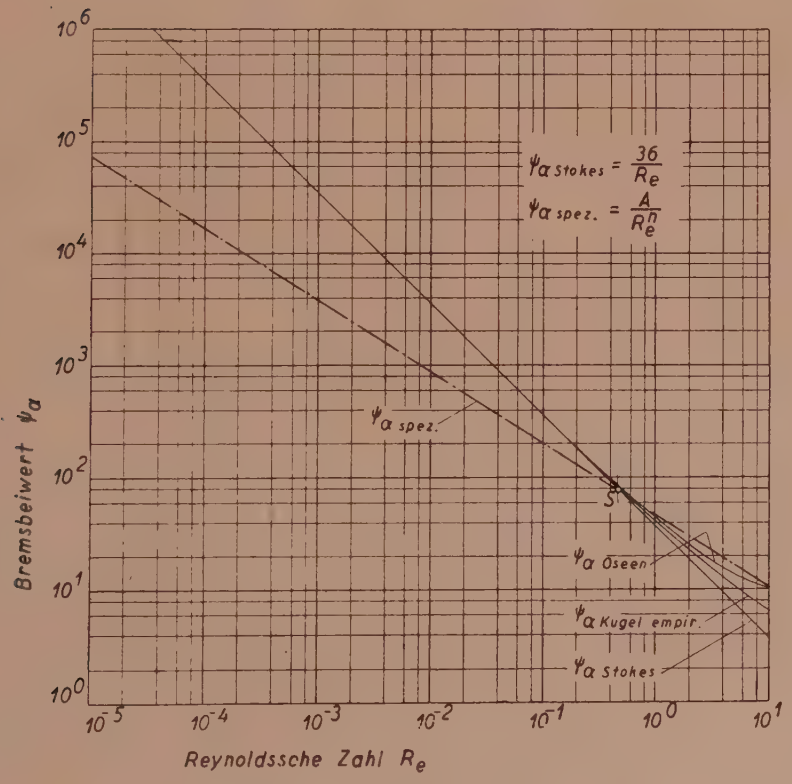
Bremsbeiwert ψ_α
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
$\psi_{\alpha\,Stokes} = \frac{36}{R_e}$
$\psi_{\alpha\,spez.} = \frac{A}{R_e^n}$
$\psi_{\alpha\,spez.}$
S
$\psi_{\alpha\,Oseen}$
$\psi_{\alpha\,Kugel\ empir.}$
$\psi_{\alpha\,Stokes}$
10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^0 10^1
Reynoldssche Zahl R_e

Abb. 8.

die Gl. (23) $\psi_{\alpha\ \text{spez.}} = 47{,}54\ R_e^{-0{,}644}$ (vgl. Abb. 8),

also die Gl. (25) $n = 0{,}644$

und die Gl. (26) $A = 47{,}54.$

Der Vollständigkeit halber sei noch aufgeführt — und zwar für a in μ, für $\gamma_l = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{gcm}^{-3}$ und $\nu = 0{,}149\ \text{cm}^2\text{s}^{-1}$

nach Gl. (13b) $\mathfrak{F}_{\text{Stokes}} = 15{,}15\ \text{cm}^{1/2}\,\text{s}^{1/2}$,

nach Gl. (29a) $\mathfrak{F}_{\text{spez.}} = 6{,}62\ \text{cm}^{\frac{2n-1}{1+n}}\ \text{s}^{\frac{2-n}{1+n}} = 6{,}62\ \text{cm}^{0{,}176}\ \text{s}^{0{,}824}.$

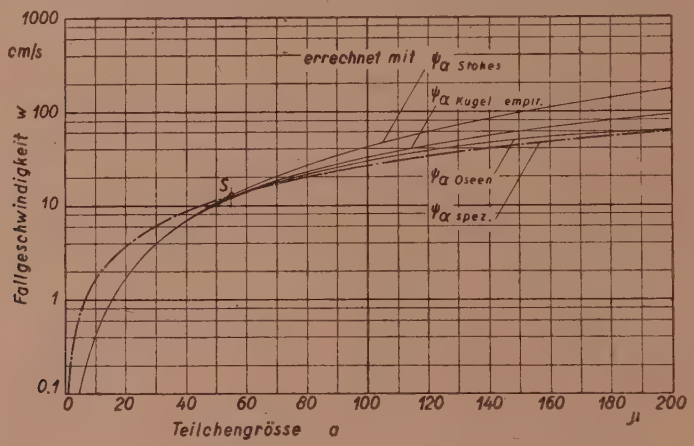

Abb. 9.

Zum Aufbau von Abb. 9, d. h. für $w = f(a)$, kann dann entweder Gl. (29) oder eine der Gl. (30) und (31) verwendet werden; es ergibt sich

oder
$$\left.\begin{aligned} a &= 6{,}62\ w^{0{,}824} \\ w &= 0{,}101\ a^{1{,}213} \end{aligned}\right\} \quad (a \text{ in } \mu,\ w \text{ in cm/s}).$$

Zusammenfassung.

Auf seine kürzeste Form gebracht, verlangt das Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen: Jedem Staub sein eigenes Fallgesetz!

Mit der Preisgabe der idealisierenden Annahme kugelförmiger Staubteilchen geht auch die eindeutige Teilchengröße als ordnendes Merkmal verloren.

Indem aber auf die Massenerscheinung eines natürlichen Staubes, der in unendlich vielfältiger Verteilungsmöglichkeit unendlich vielgestaltige Teilchen in stetiger Folge enthält, die Betrachtungsweise der Statistik, hier näherhin das Gaußsche Verteilungsgesetz angewandt wird, gelingt es, wie für die Teilchengröße und Fallgeschwindigkeit, so auch für eine aus Widerstand und Korngestalt gebildete Größe kollektive Mittelwerte zu bilden. Für diese kombinierte Kenngröße wird die Bezeichnung „Bremsbeiwert" vorgeschlagen. Ihre Einführung in das allgemeine quadratische Widerstandsgesetz ergibt ein staubeigenes Fallgesetz, in dem das in w lineare Stokessche Kugelfallgesetz als Sonderfall enthalten ist.

Dieses staubeigene Fallgesetz bildet die Brücke zwischen den beiden Kennlinien — der Fälligkeitslinie und der Körnungslinie — eines bestimmten Staubes, von denen die eine aus dem Meßbereich der Windsichtung, die andere aus dem Bereich der Siebung mit Hilfe des Gaußschen Verteilungsgesetzes stetig und wahrscheinlich in das der Messung nicht mehr zugängliche Gebiet verlängert wurde. Es leuchtet ein, daß es

damit auch an die Versuchsbedingungen — Temperatur, Zähigkeit, Wichte des Gases — gebunden ist und einer Richtigstellung bedarf, wenn es aus den Bedingungen der Windsichtung beispielsweise auf den Ausscheidungsvorgang in einer Entstaubungsanlage übertragen werden soll. Dieser Übergang vom „staubeigenen" zum „betriebseigenen" Fallgesetz sei einer weiteren Betrachtung vorbehalten.

Literatur:

[1] E. Rammler: „Kritische Betrachtungen zur Frage der Fallgeschwindigkeits- und Körnungslinien von Flugstäuben". Braunkohle **38**, H. 38, 675ff (1939). — [2] Vgl. Torsten Widell: „Zur Berechnung der Fallgeschwindigkeit von Staubteilchen. Z. VDI **80**, 1497/98 (1936). — [3] S. auch „Richtlinien für die Bestimmung der Zusammensetzung von Stauben nach Korngröße und Fallgeschwindigkeit". Herausgegeben vom Fachausschuß für Staubtechnik im VDI. Berlin 1936. — [4] S. u. a. P. Rosin u. E. Rammler: Die Kornzusammensetzung des Mahlgutes im Lichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kolloid-Z. **67**, 16/26 (1934). E. Feifel: „Zyklonentstaubung". Körnungslinie und Ausscheidungsgrad". Forsch.-Arb. Ing.-Wes. **15**, H. 2, 102 (1944). — [5] Vgl. E. Feifel: „Zyklonentstaubung. Der Zyklon als Wirbelsenke". Forsch.-Arb. Ing.-Wes. **9**, H. 2, 68 (1938). E. Feifel: „Zyklonentstaubung. Die ideale Wirbelsenke und ihre Näherung". Forsch.-Arb. Ing.-Wes. **10**, H. 5, 212 (1939).

(Eingegangen am 20. Dezember 1945.)

Der Mechanismus des elektrischen Feldes.

Von **L. Flamm**, Wien.

Mit 14 Textabbildungen.

Inhalt.

Faradays Feldbegriff und seine Auswirkung. Einführung des Begriffes Feldmaterie neben dem der Korpuskelmaterie. Das Ineinander der Bestandteile der Feldmaterie gegenüber dem Nebeneinander der Bestandteile der Korpuskelmaterie. Erweiterung der Elektronentheorie zur Theorie der elektrischen Elementarfelder. Vorausgesetzte Gestalt der elektrischen Elementarfelder. Die asymptotische Näherung des homogenen elektrischen Elementarfeldes. Behandlung von ebenen Schwingungen des homogenen elektrischen Elementarfeldes. Kinematik der Feldmaterie. Die magnetische Feldstärke Vektor der Flächengeschwindigkeit der elektrischen Feldlinien. Beweis für das Magnetfeld stationärer elektrischer Ströme. Elektrisches Feld eine Art Vektormaterie mit der magnetischen Feldstärke als kinematischem Bestimmungsstück. Dynamik des ladungsfreien elektrischen Elementarfeldes mittels der diesbezüglichen Formeln der Elektronentheorie. Differentialgleichung der schwingenden elektrischen Feldlinie im homogenen elektrischen Elementarfelde. Feld der ebenen elektrischen Elementarwelle. Dynamisches Zusatzfeld zum homogenen elektrischen Elementarfeld, ebene elektromagnetische Welle. Ausbreitung elektrischer Elementarwellen unserem mechanischen Verständnis erschlossen, nicht aber die der elektromagnetischen Wellen für sich allein. Fresnelscher Lichtäther raumerfüllende Feldmaterie. Statt Newtons leerem Raum substanzerfüllter Raum nach Descartes. Ebene elektrische Elementarwellen erfüllen Maxwells elektrodynamische Grundgleichungen für strom- und ladungsfreies Gebiet. Theorie der elektrischen Elementarfelder deutet anschaulich das Zustandekommen der elektrodynamischen Grundgesetze. Fehlschlagen der Frühversuche einer mechanischen Erklärung veranlaßte phänomenologischen Standpunkt in der Elektrodynamik. Der allgemeine Fall der kugelförmigen elektrischen Elementarwellen. Elektromagnetische Kugelwellen. Mechanismus zur Erklärung der Grundgleichungen der Elektronentheorie. Einfluß der Elementarladungen auf das elektrische Elementarfeld.

Der Mechanismus des elektrischen Feldes.

Dem genialen englischen Physiker Michael Faraday verdanken wir die Entdeckung des Feldbegriffes. Demnach gehen von einer positiven elektrischen Ladung elektrische

Feldlinien radial hinaus in den Raum (Abb. 1), in eine negative elektrische Ladung münden elektrische Feldlinien radial von allen Seiten ein (Abb. 2). Die Anzahl dieser Feldlinien ist der Ladung proportional. Diese elektrischen Feldlinien sind es nach Faraday, welche im Ausmaß ihrer Liniendichte die Kraftwirkungen der Ladungen in den verschiedenen Abständen hervorbringen. Die Einführung des Feldbegriffes durch Faraday erwies sich von ungeheurer Bedeutung für die Fortentwicklung der Physik. Auf dieser Grundlage entwickelte Maxwell seine umwälzende Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, welche zur Entdeckung der elektromagnetischen Wellen führte. Die auf dieser Grundlage sich mächtig entwickelnde Elektrotechnik hat die Begriffe des elektrischen und des magnetischen Feldes einer breiteren Öffentlichkeit geläufig gemacht. Nichtsdestoweniger kann man aber nicht behaupten, daß sich der Feldbegriff dadurch über Faraday hinaus vertieft und weiterentwickelt

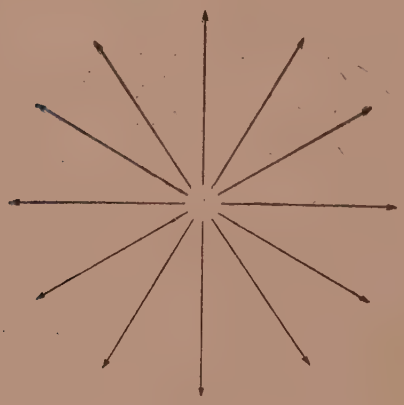

Abb. 1.

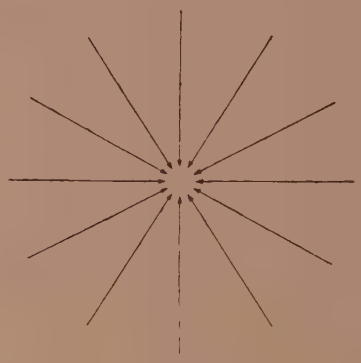

Abb. 2.

hätte. Man kann im Gegenteil eher behaupten, daß Faraday eine tiefe innere Überzeugung von der Realität des Feldes hatte, während die Folgezeit im Feldbegriff eher ein nützliches Ausdrucksmittel sah, abstrakte quantitative Beziehungen in anschaulicher Weise darzustellen. Hat man aber das Gefühl, im Feldbegriff etwas künstlich Geschaffenes vor sich zu haben, das nur für die Beschreibung einer beschränkten Gruppe physikalischer Erscheinungen ausgezeichnet geeignet ist, so ergibt sich von selbst nicht das allgemeine Bedürfnis, mit der Fortentwicklung der Physik auch den Feldbegriff zu entwickeln. Ein Anlaß hierzu wäre bereits vorhanden gewesen, als die Maxwellsche Elektrodynamik als Elektronentheorie von H. A. Lorentz weiterentwickelt wurde. Der Anstoß, die Elektrodynamik bewegter Körper, hatte anscheinend mit dem Feldbegriff nichts zu tun. Aber die grundlegende Voraussetzung dieser Theorie, die Annahme einer atomistischen Struktur der Elektrizität, wäre wohl dazu angetan gewesen, sich diesbezüglich auch mit dem elektrischen Feld auseinanderzusetzen.

Erst der Einsteinsche Äquivalenzsatz von Masse und Energie hatte dazu geführt, das elektromagnetische Feld in neuem Lichte zu sehen. Die Maxwellsche Elektrodynamik hatte die Energiedichte des Feldes zu berechnen gelehrt. Aus dieser Energiedichte ließen sich nach dem Satz von der Erhaltung der Energie auch die Maxwellschen Spannungen berechnen, welche den Vorstellungen Faradays entsprechend die Kraftwirkung des Feldes vermitteln. Nach dem Einsteinschen Satze bedeutet nun aber die Energiedichte des Feldes auch Massendichte. Demnach kommen dem Felde Spannungen und Masse zu, ähnlich einem festen Körper. Mit Recht wird daher in Hermann Weyls „Raum-Zeit-Materie“ das Feld eine Form der Materie genannt.

Wir wollen dafür die Bezeichnung Feldmaterie einführen. Sie verhält sich in vieler Beziehung anders als die uns geläufige Form der Materie, mit ihrem Nebeneinander von Atomen und Molekülen als Bausteinen, die noch weiter aus Elektronen, Protonen und Neutronen sich zusammensetzen. Wir wollen sie daher als Korpuskelmaterie bezeichnen. Die Feldmaterie dagegen ist ein Kontinuum, welches den ganzen Raum erfüllt. Auch ist die Feldmaterie durchdringlich, während man einst die Undurchdringlichkeit als physikalische Grundeigenschaft aller Körper betrachtete. Heute, wo man die Kerne auch der schwersten Atome mit Korpuskularstrahlen durchschießt, weiß man, daß hier kein prinzipieller, sondern nur ein quantitativer Unterschied vorliegt: Die Korpuskelmaterie ist äußerst schwer, die Feldmaterie äußerst leicht durchdringlich. Das Vorhandensein von Spannungen und Massendichte befähigt aber die Feldmaterie, ähnlich einem festen Körper zu schwingen und Transversalwellen fortzupflanzen. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, den in der Quantenmechanik aufgetretenen, paradox erscheinenden Dualismus Korpuskel-Welle unserem Verständnis zu erschließen; denn das Elektron kann einerseits mit seiner Ladung und Masse als Korpuskel wirksam sein, anderseits in den Schwingungen und Wellen seines Feldes zur Geltung kommen. So könnte also die Weiterentwicklung des Feldbegriffes gerade in Hinblick auf die moderne Physik von besonderer Bedeutung sein.

Arbeiten über die Struktur der Feldmaterie, welche allgemein Anklang gefunden hätten, liegen kaum vor, während uns die Struktur der Korpuskelmaterie heute schon sehr geläufig ist. Im festen Zustand halten Kohäsionskräfte die nebeneinanderliegenden Atome zusammen. Die feste Substanz kann auch aus mehreren nebeneinanderliegenden Stücken bestehen, zwischen deren Berührungsflächen keine Kohäsionskräfte wirksam sind. Im tropfbarflüssigen und im gasförmigen Zustande besteht die Substanz aus mehr oder weniger losen Molekülen, die im allgemeinen aus einem oder nur wenigen Atomen aufgebaut sind. Bei der Feldmaterie haben wir prinzipiell andere Verhältnisse zu erwarten; Teile der Feldmaterie können nur ineinanderliegen, da jede Feldmaterie sich über den ganzen Raum erstreckt. Daß aber das elektrische Quellenfeld aus Teilen aufgebaut ist, folgt notwendig aus der Grundhypothese der Elektronentheorie, daß jede elektrische Ladung sich aus Elementarladungen zusammensetzt. Zu jeder Elementarladung gehört aber ein elektrisches Quellenfeld, das jede Verschiebung der Elementarladung zwangsläufig mitmacht und das wir als elektrisches Elementarfeld bezeichnen wollen. Elektrische Felder superponieren sich bloß, Kräfte resultieren nur auf elektrische Ladungen. Aus diesem Grunde haben wir vorauszusetzen, daß jedes elektrische Elementarfeld für sich, unbeeinflußt von überlagerten Elementarfeldern, überall im ladungsfreien Gebiet Schwingungen ausführt und Wellen fortpflanzt, nur auf Grund seiner eigenen Maxwellschen Spannungen und seiner eigenen Massendichte. Auch wenn die überlagerten Elementarfelder so beschaffen sind, daß sie sich kompensieren, daß also keine resultierende Feldstärke zustande kommt, das Gebiet also im herkömmlichen Sinn als feldfrei bezeichnet wird, so kann trotzdem jedes der überlagerten Elementarfelder für sich seine Schwingungen und seine Wellenfortpflanzung ausführen, ganz so, als ob die überlagerten Elementarfelder gar nicht vorhanden wären. Außerdem müssen wir offenbar voraussetzen, daß diese unabhängigen Schwingungen und Wellen in den einzelnen elektrischen Elementarfeldern gerade diejenigen elektromagnetischen Erscheinungen darstellen, welche der Maxwellschen Elektrodynamik gehorchen.

Das elektrische Elementarfeld eines positiven elektrischen Elementarquantums haben wir uns also von der Gestalt der Abb. 1, das eines negativen elektrischen Elementarquantums von der Gestalt der Abb. 2 vorzustellen. Ein positives und ein negatives Elementarquantum in einem bestimmten Abstand voneinander erzeugen

ein resultierendes Feld, wie es in Abb. 3 dargestellt ist. Von ziemlich gleicher Gestalt ist auch das Magnetfeld eines Magnetstabes, der in erster Näherung durch gleichstarke, aber entgegengesetzte Pole an den Stabenden repräsentiert wird. Durch Eisenfeilspäne auf einer Glasplatte kann der Verlauf der resultierenden magnetischen Feldlinien leicht demonstriert werden. Dieses Experiment dürfte einen starken Anstoß zur Aufstellung des Feldbegriffes gegeben haben. Trotzdem betrachten wir das elektrische Feld der Abb. 3 als rein phänomenologisch, hinter dem als physikalische Realitäten die elektrischen Elementarfelder Abb. 1 und Abb. 2 stehen, durch deren Zusammenwirken das Feld Abb. 3 resultiert. Sicher ist diese Behauptung allerdings nicht. Vielleicht haben alle elektrischen Elementarfelder die Gestalt der Abb. 3, indem die elektrischen Feldlinien des Elementarfeldes immer eine Quelle in Form einer positiven Elementarladung und zugleich eine Senke in Form einer negativen Elementarladung besitzen, so daß also immer eine bestimmte positive Elementarladung mit einer bestimmten negativen Elementarladung durch ein elektrisches Elementarfeld verknüpft ist. In einem Umkreis um eine Elementarladung, dessen Durchmesser klein ist gegen den Abstand des Ladungspartners, kann immerhin auch dann noch das elektrische Elementarfeld durch Abb. 1 bzw. 2 mit genügender Näherung dargestellt werden. Bei der

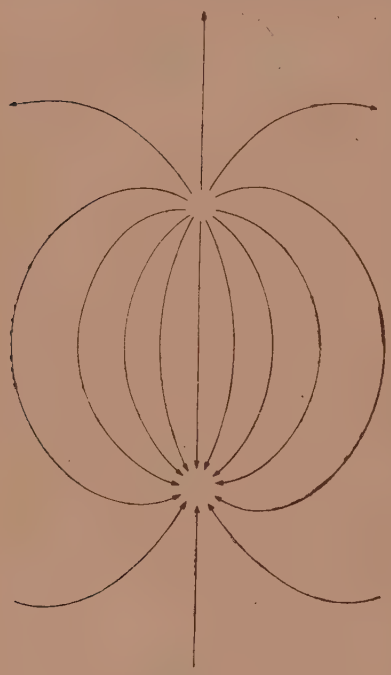

Abb. 3.

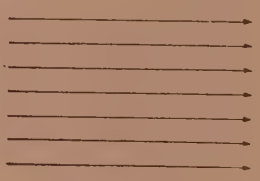

Abb. 4.

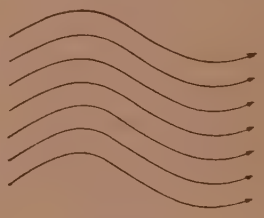

Abb. 5.

durch die kosmische Höhenstrahlung ausgelösten Pärchenbildung, bei der eine positive und eine negative Ladung zugleich durch ein neutrales Strahlungsquant erzeugt werden, haben wir vielleicht die beiden Partner eines elektrischen Elementarfeldes vor uns. Solange aber keine Erscheinungen bekannt sind, die einen solchen Sachverhalt beweisen, wollen wir ihn auch nicht in Rechnung stellen und uns die elektrischen Elementarfelder in Form der Abb. 1 bzw. 2 veranschaulichen.

Betrachten wir nunmehr ein Gebiet, dessen lineare Ausdehnungen klein sind gegen den Abstand vom Ladungszentrum, so kann man in genügender Näherung das elektrische Elementarfeld dort als homogenes elektrisches Feld zur Darstellung bringen (Abb. 4). Legt man die X-Achse eines kartesischen Koordinatensystems in die Richtung der elektrischen Feldlinien, so ist der Vektor der elektrischen Erregung durch die einfache Formel gegeben

$$\mathfrak{D}^0 = D_0\,\mathfrak{i}, \tag{1}$$

in welcher D_0 eine Konstante bedeutet, den Betrag der elektrischen Erregung des homogenen Feldes. Alle Wirkungen, die vom Ladungszentrum des elektrischen Elementarfeldes ausgehen, werden in allen zu den elektrischen Feldlinien senkrechten Ebenen kongruente Erscheinungen hervorbringen. Die dadurch hervorgerufenen Schwingungen der Feldmaterie werden das elektrische Elementarfeld zwar unhomogen machen, aber nur so, daß bloß eine Abhängigkeit von der einen unabhängigen räum-

lichen Variablen x auftritt. Behandeln wir ferner den Spezialfall, daß Schwingungen nur in der XY-Ebene auftreten, so haben wir also ein Feldlinienbild zu erwarten, wie es in Abb. 5 dargestellt ist. Die Kurvenschar der elektrischen Feldlinien ist durch eine Gleichung von der Gestalt gegeben

$$y = F(x, t) + \text{konst.} \tag{2}$$

Hierin bedeutet $F(x, t)$ die Schwingungsfunktion, welche im Falle des ungestörten homogenen elektrischen Elementarfeldes identisch verschwindet.

Die Krümmung der elektrischen Feldlinien bedeutet das Auftreten eines Zusatzfeldes, das wegen Erhaltung der Ladungsfreiheit nur transversal sein kann, so daß wir den Ansatz zu machen haben

$$\mathfrak{D}^* = D^*(x, t)\,\mathfrak{j}.$$

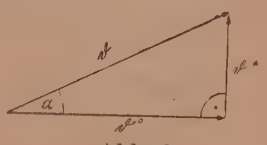

Abb. 6.

Die elektrische Erregung

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^0 + \mathfrak{D}^* \tag{3}$$

schließt nunmehr mit der X-Richtung einen Winkel α ein, der durch die Richtungstangente der Kurven (2) nach der Formel

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

bestimmt ist. Anderseits entnimmt man der Abb. 6

$$D^* = D_0 \operatorname{tg}\alpha,$$

so daß man schließlich schreiben kann

$$\mathfrak{D}^* = D_0 \frac{\partial y}{\partial x}\,\mathfrak{j}. \tag{4}$$

Wir setzen das Ergebnis der Formeln (1), (3) und (4) in der Gestalt an

$$\mathfrak{D} = D_0\,\mathfrak{t} \tag{5}$$

durch Einführung des Tangentialvektors an die elektrischen Feldlinien

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{i} + \frac{\partial y}{\partial x}\,\mathfrak{j}. \tag{6}$$

Mittels der Formel

$$\mathfrak{s} = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{t}] \tag{7}$$

führen wir auch einen Normalvektor ein, für den aus (6) folgt

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{j} - \frac{\partial y}{\partial x}\,\mathfrak{i}. \tag{8}$$

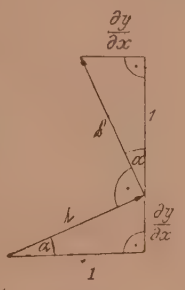

Abb. 7.

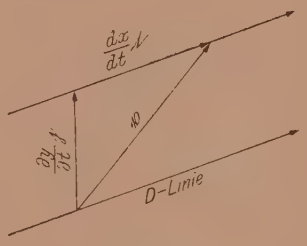

Abb. 8.

Die Formeln (6) und (8) werden durch Abb. 7 veranschaulicht. Für die Beträge der dargestellten Vektoren folgert man

$$(\mathfrak{s}) = (\mathfrak{t}) = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{9}$$

In der Kinematik liegen bei der Feldmaterie ganz andere Verhältnisse vor wie bei der Korpuskelmaterie, weil es sich bei der Feldmaterie um die Bewegung von Linien, der Feldlinien, bei der Korpuskelmaterie um die Bewegung von Punkten, Massenpunkten, handelt. Während durch die Bewegung eines Punktes eindeutig eine Geschwindigkeit bestimmt ist, kann man der Bewegung einer Linie eine ganze Mannigfaltigkeit von Geschwindigkeiten zuordnen. So kann die Bewegung der D-Linie in Abb. 8 in die gezeichnete verschobene Lage durch jede Geschwindigkeit der Mannigfaltigkeit hervorgebracht werden

$$\mathfrak{v} = \frac{\partial y}{\partial t}\,\mathfrak{j} + \frac{dx}{dt}\,\mathfrak{t} \tag{10}$$

mit beliebigem $\frac{dx}{dt}$. Dagegen ist der Ausdruck

$$[\mathfrak{v}\,\mathfrak{t}] = \frac{\partial y}{\partial t}\,[\mathfrak{j}\,\mathfrak{t}]$$

frei von dieser Unbestimmtheit. Nach (6) erhält man weiter

$$[\mathfrak{v}\,\mathfrak{t}] = -\frac{\partial y}{\partial t}\,\mathfrak{k}.$$

Multiplikation mit D_0 gibt nach (5) weiter

$$[\mathfrak{v}\,\mathfrak{D}] = -D_0\,\frac{\partial y}{\partial t}\,\mathfrak{k} \tag{11}$$

als eindeutig durch die Bewegung der elektrischen Feldlinien bestimmte Größe.

Der auf der linken Seite von (11) stehende Ausdruck bedeutet die Flächengeschwindigkeit des Vektors der elektrischen Erregung und ist selbst ein Vektor, der durch seinen Betrag den Inhalt der bei der Bewegung des Vektors $\mathfrak{D}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in der Zeiteinheit überstrichenen Parallelogrammfläche gibt, die in Abb. 9 schraffiert eingezeichnet ist und mit seiner Richtung die Normale dieser Fläche bestimmt. Wie Abb. 9 auch geometrisch erkennen läßt, führt die ganze Mannigfaltigkeit von Geschwindigkeiten (10) auf die gleiche Flächengeschwindigkeit. Gerade diese Flächengeschwindigkeit ist die zur Angabe der Bewegung von Feldlinien geeignete Größe. Ein Punkt beschreibt bei seiner Bewegung eine Bahnkurve mit einer bestimmten Geschwindigkeit, eine Feldlinie aber beschreibt bei ihrer Bewegung eine Bahnfläche mit einer ganz bestimmten Flächengeschwindigkeit des Feldvektors. In dem hier behandelten Sonderfall von Schwingungen des homogenen elektrischen Elementarfeldes ist die Bahnfläche der Feldlinien die XY-Ebene, der hierfür geltende spezielle Wert des Vektors der Flächengeschwindigkeit auf der rechten Seite von (11) ist darum parallel zur Z-Achse orientiert. Wegen seiner physikalischen Wichtigkeit war auch der Vektor der Flächengeschwindigkeit der elektrischen Feldlinien schon längst in Gebrauch, nur daß man dieser seiner grundlegenden Bedeutung keine rechte Beachtung geschenkt hatte. Der Vektor der Flächengeschwindigkeit der elektrischen Feldlinien ist nämlich die magnetische Feldstärke; es gilt also die Beziehung

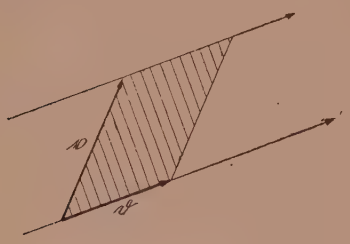

Abb. 9.

$$\mathfrak{H} = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{D}]. \tag{12}$$

Auf Grund der Theorie der Ampèreschen Molekularströme ist auch jedes statische Magnetfeld auf elektrische Ströme zurückzuführen. Es genügt also zu zeigen, daß Formel (12) das Magnetfeld stationärer elektrischer Ströme auch tatsächlich richtig wiedergibt.*

Das elektrische Elementarfeld der Elementarladung e in Abb. 1 und 2 wird durch die Formel dargestellt

$$\mathfrak{D} = \frac{e}{4\pi r^2}\,\mathrm{grad}\,r \tag{13}$$

für einen Punkt im Abstand r vom Ladungszentrum. Bewegt sich die Ladung e stationär oder auch quasistationär mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, deren Betrag für die elektrischen Ströme als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit vorausgesetzt werden kann, so bewegt sich das Feld wie starr verbunden mit, so daß man auch allen Feldlinien dieselbe Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zuzuschreiben hat. Dadurch wird nach Formel (12) das Magnetfeld erzeugt

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{4\pi r^2}\,[\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,r]. \tag{14}$$

* L. Flamm: Algebraische Elektrodynamik. S.-B. Akad. Wiss. Abt. II a **144**, 250 (1935).

Es soll noch betont werden, daß die Bewegung des elektrischen Elementarfeldes als reine Translation vorausgesetzt wird, ohne jede Drehung, bei welcher die Außenpartien Überlichtgeschwindigkeit erhalten würden, so daß die Translation tatsächlich zwangläufig zustande kommt.

Wir betrachten nunmehr ein Stromelement vom Volumen $(q\,l)$ nach Abb. 10, dessen Abmessungen wir als verschwindend klein gegen den Abstand r des Aufpunktes voraussetzen. Indem wir über die in ihm enthaltenen stromerzeugenden Elementarladungen summieren, erhalten wir für das vom Stromelement erzeugte Magnetfeld

Abb. 10.

$$\mathfrak{H} = \frac{\left[\sum e_i \mathfrak{v}_i, \operatorname{grad} r\right]}{4\pi r^2}. \qquad (15)$$

Wir fassen die Ladungen in Gruppen von solchen mit nur wenig verschiedenem $(\mathfrak{v}_i\,l)$ zusammen, die wir mittels ihrer mittleren Ladungsdichte ϱ in Rechnung stellen und können so umformen

$$\sum e_i \mathfrak{v}_i = \sum \varrho_k (q\,l)\,\bar{\mathfrak{v}}_k.$$

Für die mittlere Geschwindigkeit jeder Gruppe gilt

$$\bar{\mathfrak{v}}_k \parallel l.$$

und man kann daher auch schreiben

$$\sum e_i \mathfrak{v}_i = \sum \varrho_k (q\,\bar{\mathfrak{v}}_k)\,l.$$

Nun ist aber

$$\sum \varrho_k (q\,\bar{\mathfrak{v}}_k) = J,$$

die Stromstärke im Stromelement. Es gilt also die Umformung

$$\sum e_i \mathfrak{v}_i = J\,l \qquad (16)$$

und damit erhält man aus (15)

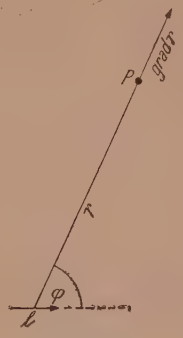

Abb. 11.

$$\mathfrak{H} = \frac{J\,[l \operatorname{grad} r]}{4\pi r^2}, \qquad (17)$$

das Laplace-(Biot- und Savart-)sche Gesetz. Für den Betrag der magnetischen Feldstärke im Aufpunkt P, Abb. 11, erhält man daraus

$$H = \frac{J\,l \sin\varphi}{4\pi r^2},$$

ihre Richtung ergibt sich senkrecht zur Zeichenebene. Es führt also (12) tatsächlich auf die bekannte Formel für das Magnetfeld stationärer elektrischer Ströme.

So ist also das Magnetfeld anderer Natur als das elektrische Feld. Nach unserer Theorie der elektrischen Elementarfelder stellt das elektrische Feld eine besondere Form der Materie dar, die wir Feldmaterie genannt haben, wobei das Wort Feld im historischen Sinn als Vektorfeld zu verstehen ist, während man heutzutage auch von einem Skalarfeld und einem Tensorfeld spricht. Eigentlich wäre es daher deutlicher, das elektrische Elementarfeld als Vektormaterie zu bezeichnen, während die Korpuskelmaterie im kristallinen, im flüssigen und im gasförmigen Zustande sozusagen skalare Materie, als anisotroper Kristall Tensormaterie darstellt. Aus diesem Grunde werden wir wohl auch Unterschiede im mechanischen Verhalten der Feldmaterie gegenüber der Korpuskelmaterie zu erwarten haben. Das Magnetfeld aber ist nach unserer Auffassung nicht materiell, sondern stellt bloß ein kinematisches Bestimmungsstück des elektrischen Elementarfeldes dar, so daß wir seine Energie als kinetische Energie zu deuten haben, was uns nicht ungeläufig ist. Wir haben sie als kinetische Energie der Feldmaterie anzusehen, die ihr äquivalente Masse als Massenvermehrung der Feldmaterie. Wohl war uns bisher der Unterschied geläufig, daß das elektrische

Feld durch einen polaren, das magnetische Feld durch einen achsialen Vektor dargestellt ist, was mit den Deutungen der Theorie der elektrischen Elementarfelder in ausgezeichnetem Einklang steht. Sonst aber hatte man wegen der weitgehenden formalen Übereinstimmung zwischen den beiden Feldern wohl bisher das Gefühl, daß sie sich ziemlich gleichartig gegenüberstehen. Das ist aber nach der Theorie der elektrischen Elementarfelder ganz anders: Das elektrische Elementarfeld ist Urform der Materie, das magnetische Feld ein geeignetes Maß der Bewegung dieser Materie.

Aus (11) und (12) erhält man für den behandelten speziellen Fall der Schwingungen im homogenen elektrischen Elementarfeld für die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H} = -D_0 \frac{\partial y}{\partial t} \mathfrak{k}. \tag{18}$$

Für den Betrag ergibt sich demnach

$$H = D_0 \left| \frac{\partial y}{\partial t} \right|;$$

er ist also durch den Betrag der Transversalgeschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t}$ der elektrischen Feldlinien bestimmt.

Wir wenden uns nun der Berechnung der Schwingungen und Wellen im homogenen elektrischen Elementarfeld zu, wozu wir also von den Formeln für die Dynamik des elektromagnetischen Feldes aus der Elektronentheorie Gebrauch machen dürfen. Demnach haben wir als dynamische Grundgleichung anzusetzen

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \mathfrak{k}^s. \tag{19}$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{g}$ die elektromagnetische Impulsdichte und $\mathfrak{k}^s$ die Kraftdichte des elektromagnetischen Feldes. Aus der Formel

$$\mathfrak{g} = \mu [\mathfrak{D}\, \mathfrak{H}] \tag{20}$$

ergibt sich nach (5) und (18)

$$\mathfrak{g} = \mu D_0^2 \frac{\partial y}{\partial t} [\mathfrak{k}\, \mathfrak{t}]$$

und weiter nach (7)

$$\mathfrak{g} = \mu D_0^2 \frac{\partial y}{\partial t} \mathfrak{z}. \tag{21}$$

Der Vektor der Impulsdichte liegt also in der $X\,Y$-Ebene als Bahnebene der elektrischen Feldlinien und steht senkrecht zu diesen. Man folgert also für die linke Seite von (19)

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \mu D_0^2 \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mathfrak{z} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} \right\}. \tag{22}$$

Die Kraftdichte setzt sich additiv zusammen aus der im elektrischen Feld und der im magnetischen Feld; es gilt also

$$\mathfrak{k}^s = \mathfrak{k}^e + \mathfrak{k}^m. \tag{23}$$

Aus den Maxwellschen Spannungen berechnet man für (5) und (6)

$$\mathfrak{k}^e = \frac{D_0^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \mathfrak{z} \tag{24}$$

und analog für (18)

$$\mathfrak{k}^m = \mu D_0^2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}. \tag{25}$$

Mithin erhält man für die rechte Seite von (19)

$$\mathfrak{k}^s = \frac{D_0^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \mathfrak{z} + \mu D_0^2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}.$$

Durch Vergleich mit (22) folgert man also aus (19) für die Dynamik des homogenen elektrischen Elementarfeldes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{26}$$

das ist eine Differentialgleichung für die elektrischen Feldlinien (2), welche die Form

der Differentialgleichung der schwingenden Saite hat. Im Gegensatz zu dieser wird sie aber in voller Strenge ohne jede Vernachlässigung gewonnen. Nun gilt die Beziehung

$$\varepsilon\,\mu = \frac{1}{c^2}, \tag{27}$$

in der c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Man kann also (26) auch schreiben

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{28}$$

Dieser Differentialgleichung zufolge pflanzen also die elektrischen Feldlinien ihre Verschiebungen und Geschwindigkeiten wie eine schwingende Saite fort, und zwar gerade mit der Geschwindigkeit c, das ist mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen. Diese im elektrischen Elementarfelde längs der Feldlinien fortlaufenden Wellen wollen wir elektrische Elementarwellen nennen.

Differentialgleichung (28) hat Integrale von der Gestalt

$$y = f(x \mp c\,t), \tag{29}$$

wobei f eine beliebige Funktion seines Argumentes bedeutet. Man berechnet daraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x \mp c\,t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mp c\,f'(x \mp c\,t).$$

Das liefert nach (5) und (6) das elektrische Feld

$$\mathfrak{D} = D_0\,\mathfrak{i} + D_0 f'(x \mp c\,t)\,\mathfrak{j} \tag{30}$$

und nach (18) das magnetische Feld

$$\mathfrak{H} = \pm c\,D_0 f'(x \mp c\,t)\,\mathfrak{k}. \tag{31}$$

Die Gl. (30) und (31) stellen also das Feld der elektrischen Elementarwelle dar. Es setzt sich zusammen aus dem homogenen elektrostatischen Elementarfeld (1) und dem dynamischen Zusatzfeld $\mathfrak{D}^* = D_0 f'(x \mp c\,t)\,\mathfrak{j}$,

$$\mathfrak{H}^* = \pm c\,D_0 f'(x \mp c\,t)\,\mathfrak{k}.$$

Diese beiden Ausdrücke stellen aber nichts anderes dar als die uns geläufigen Formeln für das Feld ebener elektromagnetischer Wellen. Demnach kommen also ebene elektromagnetische Wellen dadurch zustande, daß ebene elektrische Elementarwellen längs der elektrischen Feldlinien eines homogenen elektrischen Elementarfeldes entlang laufen. Das elektrostatische Elementarfeld ist im allgemeinen durch andere elektrostatische Elementarfelder in seiner Wirkung nach außen kompensiert, so daß nur das dynamische Zusatzfeld, die elektromagnetische Welle, zur Beobachtung kommt. Es spielt also das elektrostatische Elementarfeld die Rolle eines verborgenen elektrischen Feldes der elektrischen Elementarwelle.

Erst die Fortpflanzung der elektrischen Elementarwelle aber erschließt sich unserem mechanischen Verständnis. Es ist verlockend, zu ihrer Erklärung direkt an das Bild der gespannten Gummischnüre anzuknüpfen, das sich Faraday zur Veranschaulichung der elektrischen Feldlinienröhren gemacht hatte. So wie nun längs der gezupften Gummischnüre mechanische Wellen entlang laufen (Experiment), so pflanzen sich die elektrischen Elementarwellen längs der elektrischen Feldlinien im elektrischen Elementarfelde fort. Die elektromagnetische Welle als ein Bestandteil der elektrischen Elementarwelle bewegt sich dabei mit. Während man sich bisher aber vorgestellt hatte, daß das elektromagnetische Feld der elektromagnetischen Welle mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit weiterläuft, entpuppt sich diese in der elektrischen Elementarwelle als bloße Phasengeschwindigkeit. Die tatsächliche Bewegung der

elektrischen Feldlinien ist transversal zu dieser; Feldrichtung und Bewegungsrichtung des elektrischen Feldes sind in der elektrischen Elementarwelle geradezu vertauscht gegenüber unseren bisherigen Annahmen für die elektromagnetische Welle. Die Fortpflanzung der elektromagnetischen Welle für sich allein zu verstehen, entzieht sich aber unserem mechanischen Verständnis. Aus diesem Grunde waren die Bestrebungen auch niemals zur Ruhe gekommen, eine mechanische Erklärung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen zu geben. Immer wieder versuchte man es, durch Aufstellung einer Ätherhypothese dieses Problem zu lösen und immer wieder scheiterte man an denselben Schwierigkeiten, denen schon Fresnel bei Aufstellung seiner mechanischen Lichttheorie mit seinem Lichtäther begegnete. Die transversale Natur der Wellen erforderte von dem Ausbreitungsmedium die elastischen Eigenschaften einer festen Substanz, das Fehlen jedes Einflusses dieses raumerfüllenden Mediums auf die Bewegung der Himmelskörper sprach aber für den flüssigen oder gasförmigen Aggregatzustand. All diese Schwierigkeiten aber rührten nur davon her, daß man den Äther bloß als Korpuskelmaterie sich vorstellen konnte. Die raumerfüllende Feldmaterie aber hat gerade die Eigenschaften, welche Fresnel vom Lichtäther voraussetzen mußte: Elastische und Trägheitseigenschaften ähnlich einem festen Körper und Durchdringlichkeit. Auf Grund der Theorie der elektrischen Elementarfelder können wir also im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie den Fresnelschen Lichtäther als die raumerfüllende Feldmaterie auffassen.

Weil die elektrischen Elementarladungen im Weltenraum im allgemeinen kein resultierendes elektrisches Feld erzeugen, betrachtete man ihn als leer. Nach der Theorie der elektrischen Elementarfelder müssen wir aber den Weltenraum überall mit Feldmaterie erfüllt annehmen. Wenn sich auch das resultierende elektrische Feld auf Null reduziert, so bleiben doch alle elektrischen Elementarfelder in solcher Weise wirksam, daß sie elektrische Elementarwellen fortpflanzen. Wir haben den Weltenraum nicht im Sinne Newtons als leer zu betrachten, sondern überall mit Substanz erfüllt im Sinne von Descartes. Diese Substanz ist aber keine Korpuskelmaterie, sondern Feldmaterie. Sie vermittelt die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen und des Lichtes durch den Raum.

Indem durch die raumerfüllende Feldmaterie alle elektromagnetischen Wirkungen mittels elektrischer Elementarwellen zustande kommen, stellt sie auch den Mechanismus zur Erklärung der Maxwellschen Elektrodynamik dar. Demnach müssen die Gesetze der Maxwellschen Elektrodynamik die Eigenschaften der Felder der elektrischen Elementarwellen beinhalten. Mit Hilfe der hier behandelten ebenen elektrischen Elementarwellen kann man natürlich nur zu den Maxwellschen Gleichungen für strom- und ladungsfreies Gebiet gelangen.

Aus der Formel für das Magnetfeld der elektrischen Elementarwelle (18) rechnet man

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\,\mathfrak{j}.$$

Aus den Formeln (5) und (6) für das elektrische Feld der elektrischen Elementarwelle erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial x}\,\mathfrak{j}.$$

Zufolge der Rechenregel

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}$$

ergibt sich

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \tag{I}$$

die erste Hauptgleichung der Elektrodynamik für ein stromfreies Gebiet. Man rechnet ferner aus (5) und (6)

$$\text{rot}\,\mathfrak{D} = D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\mathfrak{k}. \tag{32}$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung der ebenen elektrischen Elementarwellen (28) kann man umformen zu

$$\text{rot } \mathfrak{D} = \frac{1}{c^2} D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mathfrak{k}.$$

Aus (18) folgert man

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = - D_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mathfrak{k}. \tag{33}$$

Es gilt also auch

$$\text{rot } \mathfrak{D} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{II}$$

die zweite Hauptgleichung der Elektrodynamik, welche das Faradaysche Induktionsgesetz bedeutet. Aus (5) und (6) folgert man ferner

$$\text{div } \mathfrak{D} = 0, \tag{III}$$

die dritte Maxwellsche Differentialgleichung des elektromagnetischen Feldes für ein ladungsfreies Gebiet. Aus (18) rechnet man schließlich

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0, \tag{IV}$$

die vierte und letzte Differentialgleichung der Maxwellschen Theorie.

Am Beispiel der Gl. (II) soll gezeigt werden, wie anschaulich das Zustandekommen der elektrodynamischen Grundgesetze auf Grundlage der Theorie der elektrischen Elementarfelder gedeutet werden kann. Die Differentialgleichung der ebenen elektrischen Elementarwelle (28) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ hat einen sehr einleuchtenden Bau. Der Ausdruck auf der linken Seite stellt offenbar ein Maß für die Stärke der Krümmung der elektrischen Feldlinien dar. Die Differentialgleichung sagt also aus, daß eine dieser Krümmung proportionale Transversalbeschleunigung der elektrischen Feldlinien auftritt und umgekehrt. Es ist dies verständlich, weil mit wachsender Krümmung die transversale Kraftkomponente zunimmt. Nach (32) ist rot $\mathfrak{D}$ dieser Krümmung der elektrischen Feldlinien proportional, nach (33) ist $- \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ der Transversalbeschleunigung proportional. So hat also nach (28) die Abnahme des Magnetfeldflusses einen elektrischen Wirbel in einer zu ihm senkrechten Ebene zur Folge und umgekehrt, was die Aussage des Faradayschen Induktionsgesetzes beinhaltet.

Schon Maxwell selbst suchte eine mechanische Begründung des Faradayschen Induktionsgesetzes mittels verborgener Friktionsrollen zu geben, Boltzmann ersann zu diesem Zwecke seine Bizyklmodelle und Heinrich Hertz baute eine besondere Form der Mechanik aus, um solche Probleme meistern zu können. Alle diese Bestrebungen waren zu gekünstelt und setzten sich nicht durch. Mittels der elektrischen Elementarwellen in den elektrischen Elementarfeldern ergibt sich der natürliche Mechanismus zur Erklärung der elektrodynamischen Erscheinungen. Aber die erfolglosen frühzeitigen Versuche, einen Mechanismus zur Erklärung der elektrodynamischen Erscheinungen zu finden, hatten noch besondere Konsequenzen. Man bezweifelte es schließlich, daß überhaupt ein solcher Mechanismus existiere, und stellte sich in der Elektrodynamik auf einen rein phänomenologischen Standpunkt, der ihre Weiterentwicklung und vielleicht auch die der ganzen Physik in der Folgezeit in einseitiger Weise beeinflußte.

Das bisher Vorgebrachte stammt im Prinzip aus einer Arbeit des Verfassers, „Der Mechanismus elektromagnetischer Wellen. I. Ebene Wellen." (S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa. Der Akademie vorgelegt noch im Oktober des Jahres 1944.) Es soll nun noch ein kurzer Überblick gegeben werden über die Ergebnisse einer weiteren Arbeit des Verfassers, „Der Mechanismus elektromagnetischer Wellen. II. Kugelwellen." (S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa. Der Akademie noch im Jahre 1944 vorgelegt.)

Es wurden die Schwingungen und Wellen des elektrischen Elementarfeldes auch ohne jede Beschränkung auf bestimmte Gebiete untersucht. Das statische elektrische Elementarfeld ist durch Abb. 1 und 2 dargestellt und durch Formel (13) gegeben. Seine elektrischen Feldlinien sind im allgemeinen Falle radial konzentrisch. Das Feld ist nicht mehr homogen, aber kugelsymmetrisch und nimmt mit wachsendem Abstand von der Zentralladung dem Betrage nach mehr und mehr ab. Die Anwendung der dynamischen Grundgleichung (19) führt auch in diesem Falle für die Feldlinienschar auf eine Differentialgleichung der schwingenden Saite, aber nicht mehr von der Gestalt (28) der homogenen schwingenden Saite, wohl aber einer inhomogenen schwingenden Saite. Diese Inhomogenität ist aber gerade so beschaffen, daß sie sich auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen nicht auswirkt, die nach wie vor konstant und gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist. Hingegen bleibt aber die Schwingungsamplitude nicht konstant wie bei der homogenen Saite, sondern nimmt, von geringfügigen Abweichungen in unmittelbarster Nähe des Ladungszentrums abgesehen, proportional mit dem Zentralabstand zu. Man hat es also, unter Beiseitelassung der zentralen Abweichungen, mit Wellen von konstanter Winkelamplitude zu tun.

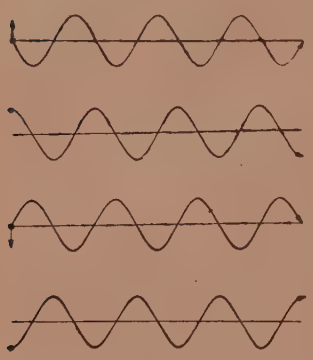

Abb. 12.

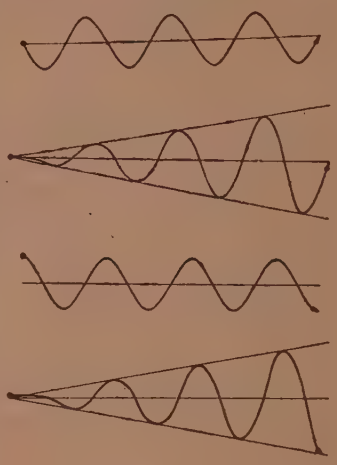

Abb. 13.

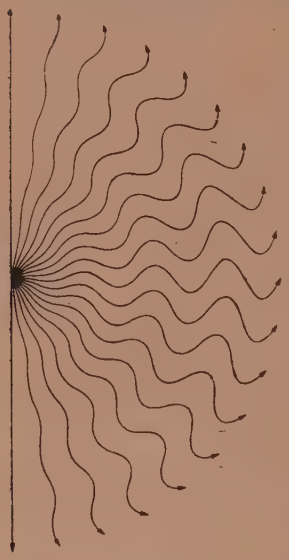

Abb. 14.

Es wurden speziell die Schwingungen und Wellen des elektrischen Elementarfeldes untersucht, die dadurch zustande kommen, daß die zentrale Elementarladung eine lineare harmonische Schwingung ausführt. Die Ergebnisse sind durch Zeichnungen erläutert. Abb. 12 zeigt zunächst zum Vergleich den Zusammenhang zwischen den linearen, harmonischen Schwingungen eines punktförmigen Erregers und den dadurch entstehenden Wellen bei der homogenen Saite in vier um eine Viertelperiode verschobenen Phasen. Abb. 13 zeigt zu zwei dieser Phasen die abgeänderte Welle in einer elektrischen Feldlinie, die senkrecht zur Schwingungsrichtung der erregenden Elementarladung verläuft. Man beachte die konstante lineare Amplitude der schwingenden Saite, die gleich der Schwingungsamplitude des punktförmigen Erregers ist, dagegen die gleiche Winkelamplitude bei den Schwingungen der elektrischen Feldlinie. Weiter ist bemerkenswert, daß das elektrische Feld unmittelbar am Zentrum die Bewegung der Elementarladung quasistatisch mitmacht, so daß das Anfangsstück der elektrischen Feldlinie wie starr mit der elektrischen Elementarladung verbunden, nur parallel zu sich selbst verschoben, sich mit der elektrischen Elementarladung mitbewegt. Abb. 14 zeigt schließlich für eine volle Meridianebene durch die Schwingungsachse der elektrischen Elementarladung die in sämtlichen elektrischen Feldlinien auftretenden elektrischen Elementarwellen. Das dynamische Zusatzfeld zum elektrostatischen Elementarfeld (13) stellt in diesem Falle die elektromagnetischen Kugel-

wellen dar. Für sie wächst die lineare Schwingungsamplitude proportional mit r für eine verkehrt r^2 abnehmende elektrische Erregung. Das bedeutet eine verkehrt r abnehmende Amplitude der elektrischen Erregung für die elektromagnetischen Wellen, was den uns geläufigen Eigenschaften der elektromagnetischen Kugelwellen vollkommen entspricht.

Es kann nun gezeigt werden, daß die so erhaltenen verallgemeinerten elektrischen Elementarwellen die Eigenschaft haben, den Grundgleichungen der Elektronentheorie von H. A. Lorentz zu genügen. Damit ist mit Hilfe der Theorie der elektrischen Elementarfelder der Mechanismus zur Erklärung dieser Grundgleichungen der Elektrodynamik aufgedeckt. Die Rechnungen mit den kugelförmigen elektrischen Elementarwellen gestalten sich zwar etwas verwickelter als mit den ebenen elektrischen Elementarwellen, prinzipiell führen sie aber zu den gleichen Ergebnissen, die Beschränkung auf Strom- und Ladungsfreiheit fällt aber weg. Auf diese Weise bewährt sich die Theorie der elektrischen Elementarfelder in voller Allgemeinheit.

Sind die elektrischen Elementarfelder nicht ladungsfrei, treten außer der zentralen Elementarladung auch andere Elementarladungen in dem betrachteten Gebiete auf, so beeinflussen die Kräfte auf diese Ladungen den Ablauf der dynamischen Vorgänge und man wird in diesem Falle nicht mehr erwarten dürfen, daß die Maxwellsche Elektrodynamik zur Berechnung dieser Erscheinungen ausreicht. Aber die Darlegungen haben gezeigt, daß ungelöste Probleme auch in der klassischen Physik vorhanden sind, deren Lösung möglicherweise dazu beitragen könnte, auch die Probleme der neueren Physik leichter zu bewältigen.

Die neue, mechanistische Theorie der Elektrizität des Verfassers ist zu einer Zeit zustande gekommen, in der das wissenschaftliche Arbeiten in Wien recht erschwert war. Die ersten, im Jahre 1944 fertiggestellten Abhandlungen sind hauptsächlich in St. Leonhard am Forst in Niederösterreich entstanden. Einen wesentlichen Fortschritt erfuhr die Theorie bei einem mehrmonatigen Aufenthalt des Verfassers im verflossenen Winter in Jenbach in Tirol. Dort in der Prantlsiedlung fand er günstigere Lebensbedingungen vor, unter denen auch die vorliegende Abhandlung zustande kam. Er dankt es der freundlichen Vermittlung der Innsbrucker Universität und einem außerordentlichen Entgegenkommen des Leiters der Jenbacher Werke, Herrn von Pichler. Die Korrektur der ersten Abzüge hat in dankenswerter Weise Herr Prof. Dr. Ing. Franz Magyar besorgt. Beim Lesen der Fahnen haben in ausgezeichneter Weise die Assistenten Dr. Ing. Karl Lang und Dr. Ing. Josef Tomiser den Verfasser unterstützt.

(Eingegangen am 15. April 1946.)

Momentenverteilungs- und Stabilitätsrechnung nach der Steifigkeitsmethode.

Von **L. Kirste**, Wien.

Mit 17 Textabbildungen.

1. Teil.

Viele Aufgaben aus dem Gebiete der durchlaufenden Balken und der Rahmen lassen sich in verhältnismäßig einfacher Weise lösen, wenn man nicht ein Gleichungssystem für statisch überzählige Größen aufstellt, sondern den von einem belasteten Feld ausgehenden Momentenverlauf direkt auf Grund der verhältnismäßigen Steifigkeit der anschließenden Teile verfolgt. Die grundlegende Betrachtungsweise, die

dazu führt, ist bereits von Hardy Cross in seinem „Momentenverteilungsverfahren“[1] angegeben worden; Wylie James hat dann dieses Verfahren durch Berücksichtigung des Knickeinflusses bei Vorhandensein von Axialkräften erweitert.[2]

Bei der „Steifigkeitsmethode“ wird zuerst eine vorbereitende Rechnung, nicht mit Momenten, sondern nur mit Steifigkeiten durchgeführt. Es ergibt sich damit einerseits der Vorteil, daß die resultierende Momentenverteilung infolge beliebiger Belastung dann unmittelbar in geschlossener Form — und nicht erst als Ergebnis einer Iteration — errechnet werden kann, anderseits ist bei Vorhandensein von Axialkräften damit auch die Ermittlung der Stabilitätsgrenze, also der Knicksicherheit des ganzen Systems oder der reduzierten Knicklängen einzelner Stäbe vorbereitet. Das Verfahren ergibt daher einen direkten Zusammenhang zwischen Momentenberechnung und Knickberechnung, der bei anderen Berechnungsmethoden nicht aufscheint.

Zur Erläuterung sollen vorerst nur Systeme betrachtet werden, die aus starr miteinander verbundenen, geraden Stäben von konstantem Querschnitt bestehen

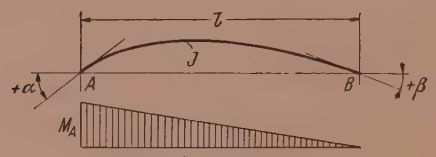

Abb. 1.

Abb. 2.

und deren Knoten unverschieblich festgehalten sind. Greift am Stabende A ein Moment M_A an (Abb. 1), während das Stabende B gelenkig gelagert ist, so ergibt sich in bekannter Weise

$$\alpha = \frac{M_A \cdot l}{3\,EJ}, \qquad \beta = \frac{M_A \cdot l}{6\,EJ}.$$

Die Verdrehungssteifigkeit des Stabes $\overline{AB}$ im Punkt A ist das Verhältnis des aufgewendeten Moments zum erzeugten Verdrehungswinkel; im vorliegenden Fall ist dieses Verhältnis gleich der „Eigensteifigkeit“ des Stabes

$$k_0 = \frac{3\,EJ}{l}. \tag{1}$$

Schließt am Stabende B ein anderer Stab an, dessen Steifigkeit k_B ist, so wird durch den Momentenangriff in A auch im Punkt B ein Moment wachgerufen (Abb. 2). Die Verdrehung des Stabes $\overline{AB}$ an diesem Ende ergibt sich durch Überlagerung:

$$\beta = \frac{M_A \cdot l}{6\,EJ} + \frac{M_B \cdot l}{3\,EJ} = \frac{1}{k_0}\left(\frac{M_A}{2} + M_B\right).$$

Sie muß gleich sein der Verdrehung des Stabes $\overline{BC}$ infolge des Momentes M_B, die in bezug auf diesen Stab in entgegengesetztem Sinn erfolgt: $\beta = -M_B/k_B$; die Gleichsetzung liefert

$$M_B = -\frac{M_A}{2} \cdot \frac{k_B}{k_0 + k_B} \quad \text{oder} \quad M_B = -\frac{M_A}{2} \cdot v_B, \tag{2}$$

wenn man mit „v_B“ den „Einspanngrad“ des Stabes $\overline{AB}$ im Knoten B bezeichnet. Nun erhält man für die Verdrehung in A:

$$\alpha = \frac{M_A}{k_0} + \frac{M_B}{2\,k_0} = \frac{M_A}{k_0}\left(1 - \frac{v_B}{4}\right).$$

[1] Hardy Cross: Analysis of continuous frames by distributing fixed end moments. Trans. Amer. Soc. Civil Engr. Bd. 96, 1 (1932).

[2] Benjamin Wylie James: Principal effects of axial load on moment-distribution. Technical Notes, Nat. Advisory Committee Aeronaut. Nr. 534 (1935).

Ist also am Stabende B eine Anschlußsteifigkeit k_B vorhanden, die den Einspanngrad $v_B = k_B/(k_0 + k_B)$ ergibt, so ist die Steifigkeit am anderen Ende

$$k_A = \frac{k_0}{1 - v_B/4} = \frac{k_0 + k_B}{1 + 3/4 \cdot k_B/k_0}. \tag{3}$$

Der Nenner des ersten Ausdrucks kann — solange keine Axialkräfte auftreten — nur zwischen 1 und 3/4 variieren. Sind an einem Stab mit der Eigensteifigkeit k_0 mehrere andere Stäbe starr angeschlossen, so ist die Steifigkeit des Anschlusses gleich der Summe der Steifigkeiten der einzelnen Stäbe und der Einspanngrad ist

$$v = \frac{\Sigma k}{k_0 + \Sigma k}. \tag{4}$$

Die Formel (3) ermöglicht die „weitergeleitete" Steifigkeit in jedem Knoten des Systems anzugeben, wenn man von einem Knoten mit bekannter Steifigkeit ausgeht. Ein besonderer Fall, dem man praktisch oft nahe kommt, ist der des Durchlaufträgers mit vielen gleichen Feldern. Für zwei aufeinanderfolgende Knoten gilt offenbar, wenn die Felderzahl ins Unendliche wächst:

$$k_n = k_{n+1} = \ldots = k_\infty = \frac{k_0 + k_\infty}{1 + 3/4 \cdot k_\infty/k_0},$$

woraus $k_\infty = k_0 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}154700\, k_0$ und $v_\infty = 0{,}535898$.

Bei ringförmig geschlossenen Systemen ergibt sich die Schwierigkeit, daß man keinen Knoten mit bekannter Steifigkeit als Ausgangspunkt hat. Da der Einfluß entfernter liegender Teile rasch abnimmt, ist aber die praktische Berechnung trotzdem leicht durchführbar, indem man von einem beliebigen Knoten ausgeht, wie das folgende Zahlenbeispiel mit den Angaben der Abb. 3 zeigen soll:

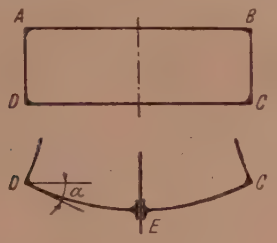

Abb. 3.

Stab $\overline{AB}$ ..... $3\,EJ/l = 5$ [tcm]
$\overline{BC}$ 3
$\overline{CD}$ 4
$\overline{DA}$ 3

Die Steifigkeit des links von A anschließenden Rahmenteiles — Stab $\overline{DA}$ — kann nur zwischen dem 1- und dem 4/3fachen Wert seiner Eigensteifigkeit schwanken. Setzt man in erster Annäherung $k_A = 1{,}2 \cdot 3{,}0 = 3{,}60$, so erhält man für die nach rechts weitergeleiteten Steifigkeiten:

im Knoten B ..... $k_B = \frac{5 + 3{,}60}{1 + 0{,}75 \cdot 3{,}60/5} = 5{,}58$,

„ „ C ..... $k_C = \frac{3 + 5{,}58}{1 + 0{,}75 \cdot 5{,}58/3} = 3{,}58$,

„ „ D ..... $k_D = \frac{4 + 3{,}58}{1 + 0{,}75 \cdot 3{,}58/4} = 4{,}53$

und damit schon genügend genau die endgültigen Werte:

$$k_A = 3{,}53; \quad k_B = 5{,}58; \quad k_C = 3{,}58; \quad k_D = 4{,}53.$$

Ist sowohl in bezug auf die Konstruktion als auch in bezug auf die Belastung Symmetrie vorhanden — z. B. Gleichstreckenlast im Feld AB —, so ist eine direkte Rechnung möglich, indem man sich den Stab $\overline{CD}$ in der Mitte zerschnitten und die beiden Hälften in E so geführt denkt, daß sie sich dort frei verschieben, aber nicht

verdrehen können (Abb. 3). Ein im Knoten D angreifendes Moment ist dann über die Stablänge $\overline{CE} = \overline{DE} = l/2$ konstant; die Verdrehung wird

$$\alpha = \frac{M \cdot l/2}{EJ}$$

und die Steifigkeit

$$k_D = \frac{2\,EJ}{l} = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2{,}67.$$

Damit ergibt sich für die Anschlußsteifigkeiten des Feldes $\overline{AB}$, von rechts oder von links kommend,

$$k_{A,B} = \frac{3 + 2{,}67}{1 + 0{,}75 \cdot 2{,}67/3} = 3{,}40,$$

also nicht mehr der gleiche Wert wie vorhin. Wie später gezeigt wird, ergibt sich aber bei symmetrischer Belastung dann doch wieder die gleiche Momentenverteilung, da — im Gegensatz zum allgemeinen Betrachtungsfall — beim zerschnittenen System die Weiterleitung der Momente beim Knoten E abbricht.

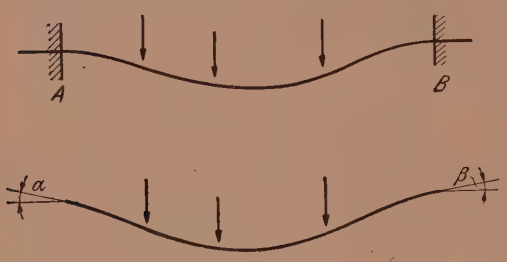

Abb. 4.

Die Kenntnis der Einspanngrade an den beiden Stabenden genügt zur Berechnung des Momentenverlaufs in einem beliebig belasteten Feld eines Rahmens oder Durchlaufträgers. Man betrachtet das Feld zuerst als beiderseits starr eingespannt und ermittelt die Volleinspannmomente $\overline{M}_A$ und $\overline{M}_B$ (Abb. 4). Denkt man sich nun die Knoten A und B freigelassen, so werden sich dort kleinere Knotenmomente M_A und M_B einstellen. Es kommen also an den Stabenden Zusatzmomente $M_A - \overline{M}_A$ und $M_B - \overline{M}_B$ hinzu und das linke Ende wird sich um

$$\alpha = \frac{M_A - \overline{M}_A}{k_0} + \frac{M_B - \overline{M}_B}{2\,k_0}$$

verdrehen. Für das bei A anschließende Nachbarfeld mit der Steifigkeit k_A gilt: $\alpha = -\frac{M_A}{k_A}$. Die Gleichsetzung der Verdrehungen, auch für das andere Stabende, liefert

$$-M_A \cdot k_0 = (M_A - \overline{M}_A) \cdot k_A + \frac{1}{2}(M_B - \overline{M}_B) \cdot k_A,$$

$$-M_B \cdot k_0 = (M_B - \overline{M}_B) \cdot k_B + \frac{1}{2}(M_A - \overline{M}_A) \cdot k_B,$$

woraus mit

$$v_A = \frac{k_A}{k_0 + k_A} \quad \text{und} \quad v_B = \frac{k_B}{k_0 + k_B}$$

$$M_A = \overline{M}_A \cdot v_A \frac{1 - v_B/4}{1 - v_A \cdot v_B/4} + \overline{M}_B \cdot \frac{v_A}{2} \cdot \frac{1 - v_B}{1 - v_A \cdot v_B/4}. \tag{5}$$

Die resultierenden Knotenmomente erscheinen also in der Form $M_A = \overline{M}_A \cdot m_A + \overline{M}_B \cdot n_A$ und $M_B = \overline{M}_A \cdot n_B + \overline{M}_B \cdot m_B$. Ist der Einspanngrad an beiden Enden derselbe und ist die Belastung symmetrisch zur Stabmitte, so sind die resultierenden Stützmomente

$$M_A = M_B = \overline{M}_{A,B}\,(m + n) = \overline{M}_{A,B}\,\frac{3\,v}{2 + v}. \tag{6}$$

Für den allgemeinen Fall $v_A \neq v_B$ sind die Momentenwerte m und n auf Tab. 1 graphisch und auf Tab. 2 in Tabellenform als Funktion der Einspanngrade v_a und v_g des anliegenden und gegenüberliegenden Stabendes dargestellt.

Als erstes Beispiel werde der Momentenverlauf in einem Träger mit fünf Stützen und einer starren Einspannung an einem Ende ermittelt, bei dem ein Feld durch eine

Tabelle 1.

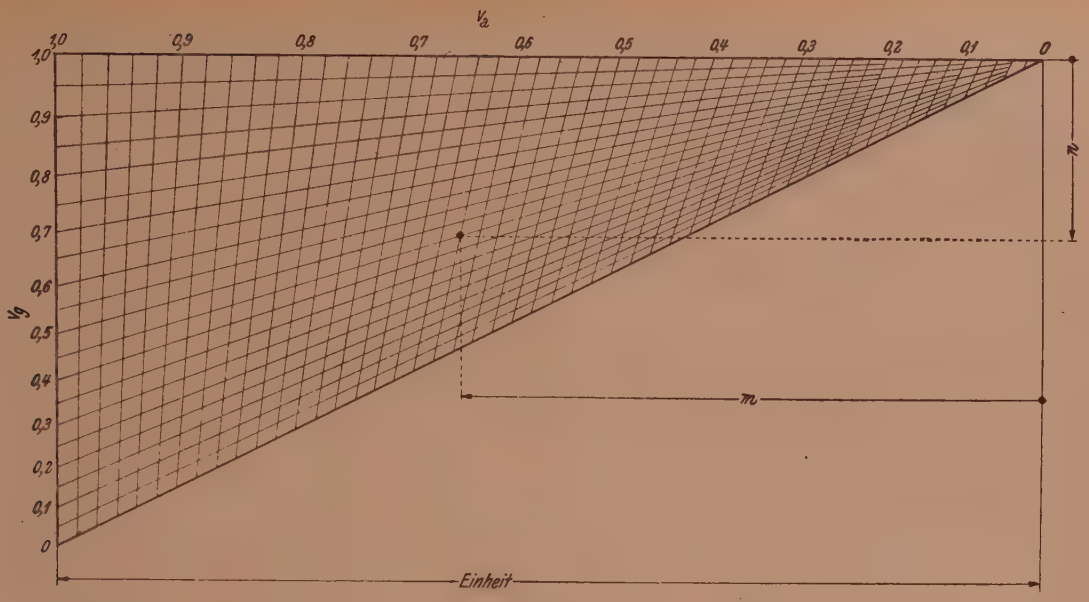

Tabelle 2.

Obere Zeile $m = \frac{v_a(1-v_g/4)}{1-v_a \cdot v_g/4}$, untere Zeile $n = \frac{v_a}{2} \cdot \frac{1-v_g}{1-v_a \cdot v_g/4}$.

v_a \ v_g	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$v_a = 0{,}1$	0,098	0,096	0,093	0,091	0,089	0,086	0,084	0,082	0,079	0,077
	045	040	035	030	025	020	015	010	005	000
0,2	196	192	188	184	180	175	171	167	162	158
	091	081	071	061	051	041	031	021	011	000
0,3	295	289	284	278	273	267	263	255	250	243
	136	122	107	093	078	063	048	032	016	000
0,4	394	388	381	375	368	362	355	348	341	333
	182	163	144	125	105	085	065	044	022	000
0,5	494	487	480	474	467	460	452	445	436	429
	228	205	182	158	134	108	082	056	028	000
0,6	594	588	580	574	568	560	553	545	538	530
	274	247	220	192	162	132	101	067	035	000
0,7	695	689	683	677	672	665	659	651	644	636
	320	290	259	226	192	157	120	081	042	000
0,8	796	792	788	783	778	773	768	762	756	750
	367	333	298	261	222	182	140	095	049	000
0,9	898	895	893	890	887	885	881	878	875	870
	415	377	338	297	253	208	160	110	057	000
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	461	421	379	334	286	235	182	125	065	000

Einzellast beansprucht ist; das Trägheitsmoment sei in allen Feldern das gleiche (Abb. 5). Nennt man die Eigensteifigkeit des belasteten Feldes k_0, dann ist, von links beginnend:

$$k_A = 0, \quad k_B = \frac{4}{2} \cdot k_0 = 2\,k_0, \quad v_B = \frac{2}{1+2} = \underline{0{,}667},$$

von rechts:

$$k_E = \infty, \quad k_D = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot k_0 = 1{,}778\,k_0, \quad k_C = \frac{1+1{,}778}{1+0{,}75 \cdot 1{,}778}\,k_0 = 1{,}190\,k_0, \quad v_C = \underline{0{,}544}.$$

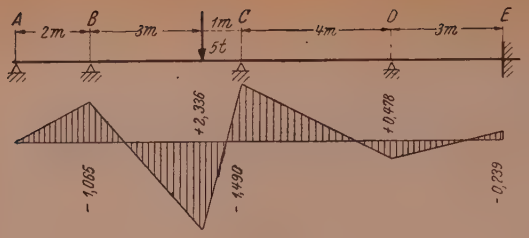

Abb. 5.

Zu diesen v-Werten gehören

$$m_B = 0{,}634, \quad n_B = 0{,}167,$$
$$m_C = 0{,}497, \quad n_C = 0{,}100.$$

Die Volleinspannmomente sind

$$\overline{M}_B = -5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{4 \cdot 4} = -0{,}938 \text{ tm},$$
$$\overline{M}_C = -5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = -2{,}812 \text{ tm},$$

daher die resultierenden Stützmomente

$$M_B = -0{,}938 \cdot 0{,}634 - 2{,}812 \cdot 0{,}167 = -1{,}065 \text{ tm},$$
$$M_C = -2{,}812 \cdot 0{,}497 - 0{,}938 \cdot 0{,}100 = -1{,}490 \text{ tm}$$

und die „weitergeleiteten" Momente

$$M_D = +0{,}5 \cdot 1{,}490 \cdot \frac{1{,}778}{1 + 1{,}778} = +0{,}478; \quad M_E = -0{,}5 \cdot 0{,}478 = -0{,}239 \text{ tm}.$$

Als zweites Beispiel werde der in Abb. 6 dargestellte, durch eine Gleichstreckenlast symmetrisch beanspruchte Rahmen durchgerechnet, dessen Steifigkeitswerte bereits früher ermittelt worden sind. Rechnet man nach der allgemein gültigen Methode, so kann man sich den Rahmen aufgerollt denken, um das Abklingen der weitergeleiteten Momente und ihre Überlagerung zu verfolgen. Mit

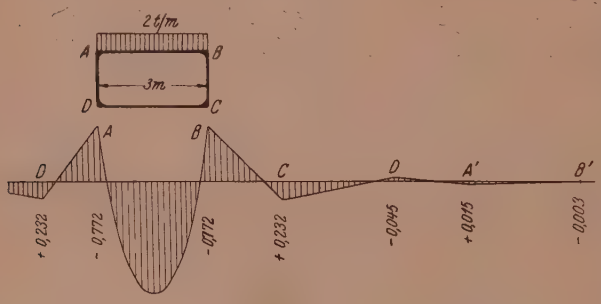

Abb. 6.

$$v_A = v_B = \frac{3{,}53}{5 + 3{,}53} = 0{,}414 \quad \text{wird}$$

$$m + n = \frac{3\,v}{2 + v} = 0{,}515.$$

Aus den Einspannmomenten $\overline{M}_{A,B} = -\frac{2 \cdot 3^2}{12} = -1{,}5$ tm ergeben sich dann, im Uhrzeigersinn fortschreitend:

$$M_{A,B} = -1{,}5 \cdot 0{,}515 = -0{,}772, \qquad M_A' = +\frac{0{,}045}{2} \cdot \frac{5{,}58}{8{,}58} = +0{,}015,$$

$$M_C = +\frac{0{,}772}{2} \cdot \frac{4{,}53}{7{,}53} = +0{,}232, \qquad M_B' = -\frac{0{,}015}{2} \cdot \frac{3{,}53}{8{,}53} = -0{,}003,$$

$$M_D = -\frac{0{,}232}{2} \cdot \frac{3{,}58}{7{,}58} = -0{,}045, \qquad M_C' \text{ und die folgenden } \sim 0.$$

Die resultierenden Stützmomente sind daher:

$$M_A = M_B = -0{,}772 + 0{,}015 - 0{,}003 = \underline{-0{,}760 \text{ tm}}.$$

Derselbe Wert ergibt sich nach der direkten Methode, die wegen der Symmetrie hier anwendbar ist:

$$v_A = v_B = \frac{3{,}40}{5 + 3{,}40} = 0{,}405, \qquad m + n = \frac{1{,}215}{2{,}405} = 0{,}506.$$
$$M_A = M_B = -1{,}50 \cdot 0{,}506 = \underline{-0{,}760 \text{ tm}}.$$

Die vorstehenden Betrachtungen verlieren ihre Gültigkeit, wenn in einem Träger- oder Rahmenteil Axialkräfte auftreten, deren Einfluß auf die Steifigkeit nicht mehr vernachlässigt werden kann. Greift an einem gelenkig geführten Stabende A ein Moment an und wird der Stab gleichzeitig durch eine Kraft P gedrückt, die in seiner

Längsrichtung wirkt (Abb. 7), so folgt aus der Momentengleichung und der Biegeformel für schwache Krümmungen:

$$M = M_A + (M_B - M_A)\frac{x}{l} + P \cdot y = -EJ \cdot y'',$$

$$y = \frac{M_A}{P}\left(\frac{x}{l} - 1 - \operatorname{ctg}\varphi \cdot \sin\frac{\varphi x}{l} + \cos\frac{\varphi x}{l}\right) + \frac{M_B}{P}\left(\frac{\sin\frac{\varphi x}{l}}{\sin\varphi} - \frac{x}{l}\right)$$

mit dem „Knickwert" $\varphi = \sqrt{\frac{Pl}{EJ}}$.

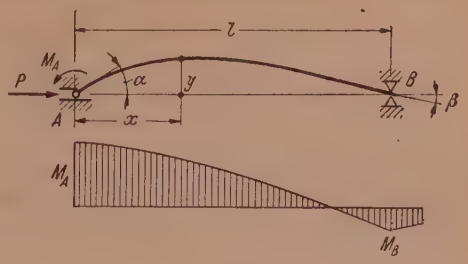

Abb. 7.

Die Verdrehung bei $x = l$ muß wieder negativ gleich der des anschließenden Teils mit der als bekannt angenommenen Steifigkeit k_B sein:

$$\beta = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_l = \frac{l}{3EJ}\left(\frac{M_A}{2} \cdot C_1 + M_B \cdot C_2\right) = -\frac{M_B}{k_B},$$

wobei $C_1 = \frac{6}{\varphi^2}\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} - 1\right)$: $C_2 = \frac{3}{\varphi^2}(1 - \varphi \operatorname{ctg}\varphi)$, die beide für $\varphi = 0$ den Wert „1" annehmen. Daraus folgt für das weitergeleitete Moment

$$M_B = -\frac{M_A}{2} \cdot \frac{C_1 \cdot k_B}{k_0 + C_2 \cdot k_B} \tag{7}$$

und die weitergeleitete Steifigkeit in A

$$k_A = \frac{M_A}{\alpha} = \frac{k_0 + C_2 \cdot k_B}{C_2 + C_3 \cdot k_B/k_0}, \tag{8}$$

worin $k_0 = \frac{3EJ}{l}$ und $C_3 = C_2^2 - C_1^2/4 = \frac{9}{\varphi^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi/2} - 1\right)$ mit dem Grenzwert $\lim_{\varphi=0} C_3 = 3/4$ bedeuten.

Die Koeffizienten C_1, C_2 und C_3 sind in Tab. 3 für Werte von φ zwischen 0 und 2π angegeben. Man sieht, daß sie negativ sein können; damit kann aber auch die Steifigkeit negativ werden, und zwar nicht nur die eines Stabendes, sondern auch die Gesamtsteifigkeit eines Knotens.

Das Nullwerden der Steifigkeit zeigt eine Stabilitätsgrenze an, denn zu einer Verformung des Systems ist dann kein Arbeitsaufwand erforderlich; die gesamte potentielle Energie nimmt bei einer endlichen virtuellen Verschiebung ab, was nach dem energetischen Stabilitätskriterium den Übergang zur Labilität bedeutet. Es läßt sich leicht zeigen, daß in einem zusammenhängenden System das Nullwerden der Gesamtsteifigkeit an allen Knoten gleichzeitig auftritt: Schließen an den Enden des Stabes mit der Eigensteifigkeit $k_0 = 1$ andere Konstruktionsteile an, deren Steifigkeiten zur Summe ΣA und ΣB ergeben (Abb. 8), so ist die Steifigkeit des Stabes rechts von A:

$$k_A = \frac{k_0 + C_2 \cdot \Sigma B}{C_2 + C_3 \cdot \Sigma B/k_0}$$

und links von B:

$$k_B = \frac{k_0 + C_2 \cdot \Sigma A}{C_2 + C_3 \cdot \Sigma A/k_0}.$$

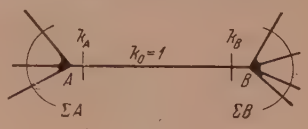

Abb. 8.

Ist nun die Gesamtsteifigkeit in A gleich Null, so hat man

$$k_A + \Sigma A = 0; \quad k_A = -\Sigma A; \quad k_B = \frac{k_0 - C_2 \cdot k_A}{C_2 - C_3 \cdot k_A/k_0} = -\Sigma B$$

und damit auch die Gesamtsteifigkeit in B: $k_B + \Sigma B = 0$.

Die Steifigkeitsmethode dient also auch zum Aufsuchen der Stabilitätsgrenze, die durch jenen Knickwert φ definiert ist, mit dem die Gesamtsteifigkeit in einem beliebigen Knoten des Systems Null wird. Sind mehrere Stäbe vorhanden, in denen

Tabelle 3.

$$-M_B = \frac{M_A}{2} \cdot \frac{C_1 k_B}{k_0 + C_2 k_B} \qquad C_1 = \frac{6}{\varphi^2}\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} - 1\right)$$

$$-k_B = \frac{k_0 + C_2 k_A}{C_2 + C_3 \cdot k_A/k_0} \qquad C_2 = \frac{3}{\varphi^2}(1 - \varphi \operatorname{ctg} \varphi)$$

$$-s = \frac{3EJ}{l^3} \cdot \frac{r_A + r_B + C_4 r_A r_B}{1 + C_2(r_A + r_B) + C_3 r_A r_B} \qquad C_3 = \frac{9}{\varphi^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi/2} - 1\right)$$

$$C_4 = 3\,\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi/2}$$

φ	C_1	C_2	C_3	C_4	φ	C_1	C_2	C_3	C_4
0,0	+1,000	+1,000	+0,750	+3,000	3,2	—32,706	—15,740	—19,683	—64,186
0,1	+1,001	+1,001	+0,751	+3,002	3,3	—12,077	—5,415	—7,136	—22,907
0,2	+1,005	+1,003	+0,753	+3,010	3,4	—7,425	—3,079	—4,303	—13,582
0,3	+1,011	+1,006	+0,757	+3,023	3,5	—5,377	—2,043	—3,052	—9,464
0,4	+1,019	+1,011	+0,762	+3,041	3,6	—4,229	—1,457	—2,349	—7,144
0,5	+1,030	+1,017	+0,769	+3,064	3,7	—3,499	—1,079	—1,897	—5,656
0,6	+1,045	+1,025	+0,778	+3,093	3,8	—2,996	—0,813	—1,583	—4,622
0,7	+1,061	+1,034	+0,789	+3,129	3,9	—2,631	—0,615	—1,352	—3,861
0,8	+1,081	+1,045	+0,801	+3,171	4,0	—2,357	—0,460	—1,177	—3,277
0,9	+1,104	+1,058	+0,816	+3,220	4,1	—2,145	—0,336	—1,037	—2,817
1,0	+1,130	+1,074	+0,834	+3,278	4,2	—1,979	—0,232	—0,925	—2,445
1,1	+1,162	+1,091	+0,853	+3,344	4,3	—1,848	—0,143	—0,833	—2,134
1,2	+1,198	+1,111	+0,875	+3,421	4,4	—1,743	—0,065	—0,755	—1,873
1,3	+1,240	+1,135	+0,903	+3,509	4,49..	—1,665	0,000	—0,693	—1,665
1,4	+1,288	+1,161	+0,933	+3,610	4,5	—1,660	+0,004	—0,689	—1,651
1,5	+1,343	+1,192	+0,968	+3,724	4,6	—1,596	+0,068	—0,633	—1,460
1,57..	+1,388	+1,216	+1,000	+3,822	4,7	—1,548	+0,128	—0,584	—1,292
1,6	+1,408	+1,227	+1,010	+3,861	4,8	—1,515	+0,185	—0,540	—1,145
1,7	+1,483	+1,267	+1,057	+4,018	4,9	—1,496	+0,241	—0,502	—1,014
1,8	+1,571	+1,315	+1,111	+4,201	5,0	—1,491	+0,298	—0,467	—0,896
1,9	+1,675	+1,370	+1,177	+4,416	5,1	—1,501	+0,356	—0,438	—0,790
2,0	+1,799	+1,437	+1,254	+4,672	5,2	—1,527	+0,417	—0,410	—0,694
2,1	+1,949	+1,516	+1,348	+4,981	5,3	—1,573	+0,484	—0,385	—0,606
2,2	+2,134	+1,612	+1,462	+5,359	5,4	—1,643	+0,559	—0,363	—0,525
2,3	+2,364	+1,733	+1,593	+5,829	5,5	—1,745	+0,647	—0,343	—0,450
2,4	+2,660	+1,885	+1,787	+6,431	5,6	—1,888	+0,754	—0,323	—0,381
2,5	+3,050	+2,086	+2,027	+7,223	5,7	—2,096	+0,890	—0,306	—0,316
2,6	+3,589	+2,362	+2,358	+8,312	5,8	—2,404	+1,075	—0,290	—0,255
2,7	+4,377	+2,762	+2,840	+9,901	5,9	—2,892	+1,348	—0,276	—0,197
2,8	+5,632	+3,396	+3,606	+12,424	6,0	—3,746	+1,801	—0,262	—0,143
2,9	+7,934	+4,555	+5,010	+17,044	6,1	—5,560	+2,780	—0,249	—0,090
3,0	+13,506	+7,349	+8,398	+28,202	6,2	—12,206	+5,976	—0,237	—0,040
3,1	+45,923	+23,566	+28,113	+93,053	6,28..	∞	∞	—0,228	0,000
3,14..	∞	∞	∞	∞					

Axialkräfte zu berücksichtigen sind, so muß der Zusammenhang zwischen diesen bekannt sein. Bei den meisten Belastungsarten bleibt das Verhältnis der Axialkräfte zueinander gewahrt und damit auch das Verhältnis der Knickwerte. Ist nur ein Knickfeld vorhanden, so lautet die Stabilitätsbedingung für den Knoten A:

$$k_A + \frac{k_0 + C_2 \cdot k_B}{C_2 + C_3 \cdot k_B/k_0} = 0.$$

Mit Hilfe der Tab. 3 ist der kleinste Wert von φ zu ermitteln, der dieser Gleichung genügt; die Eulersche Knicklast ist $P = \varphi^2 EJ/l^2$ und damit die reduzierte Knicklänge

$$\frac{s_k}{l} = \frac{\pi}{\varphi}. \qquad (9)$$

Für drei charakteristische Wertepaare von k_A und k_B ergeben sich dann bekannte Werte der reduzierten Knicklänge:

$$k_A = 0; \quad k_B = 0: \qquad C_2 = +\infty; \quad \varphi = \pi; \qquad s_k/l = 1{,}0;$$
$$k_A = \infty; \quad k_B = 0: \qquad C_2 = 0; \quad \varphi = 4{,}493; \quad s_k/l = 0{,}699;$$
$$k_A = \infty; \quad k_B = \infty: \quad C_2/C_3 = -\infty; \quad \varphi = 2\pi; \quad s_k/l = 0{,}5.$$

Sind mehrere Knickfelder vorhanden, so werden die kritischen φ-Werte am einfachsten durch Probieren gefunden, wie das folgende Zahlenbeispiel zeigt (Abb. 9). Ist das Verhältnis $P'/J' : P''/J'' = 4 : 3$, so wird $\varphi'/\varphi'' = 1{,}3\sqrt{4/3} = 1{,}5$ und das Nullsetzen der Gesamtsteifigkeit in B ergibt:

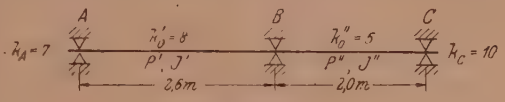

Abb. 9.

$$\frac{8 + C_2' \cdot 7}{C_2' + C_3' \cdot 7/8} + \frac{5 + C_2'' \cdot 10}{C_2'' + C_3'' \cdot 10/5} = 0.$$

Eine erste Annahme mit $\varphi' = 3{,}9$; $\varphi'' = 2{,}6$ liefert:

$$\frac{8 - 4{,}30}{-0{,}615 - 1{,}182} + \frac{5 + 23{,}62}{2{,}362 + 4{,}716} = -2{,}61 + 4{,}05 = +1{,}44,$$

eine zweite mit

$$\varphi' = 4{,}2; \quad \varphi'' = 2{,}8: \quad -6{,}13 + 3{,}68 = -2{,}45,$$

eine dritte mit

$$\varphi' = 4{,}05; \quad \varphi'' = 2{,}7: \quad -3{,}90 + 3{,}87 = -0{,}03.$$

Die reduzierten Knicklängen sind also

$$(s_k/l)' = \pi/4{,}05 = \underline{0{,}776} \quad \text{und} \quad (s_k/l)'' = \pi/2{,}70 = \underline{1{,}136}.$$

Wird ein Stab nicht gedrückt, sondern gezogen, so ist P negativ und φ imaginär; in den Formeln für C_1, C_2 und C_3 sind dann die trigonometrischen Funktionen durch

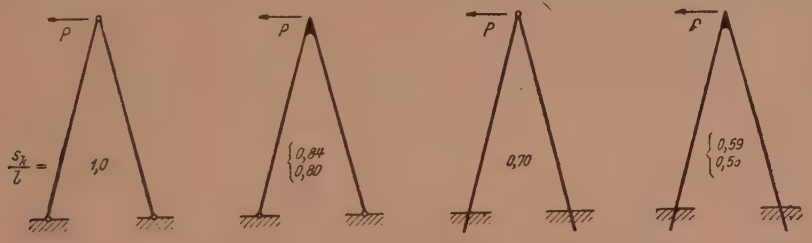

Abb. 10.

die entsprechenden hyperbolischen zu ersetzen. Diesen günstigen Einfluß auf die Steifigkeit wird man praktisch meist vernachlässigen. In Abb. 10 sind die reduzierten Knicklängen für ein einfaches statisches System zusammengestellt, bei verschiedener Ausführung der Stabanschlüsse, sowie ohne und mit Berücksichtigung der Axialkraft im gezogenen Stab.

Das Nullsetzen der Steifigkeit an der Spitze liefert:

$$\frac{k_0}{C_2} = 0; \quad \frac{k_0}{C_2} + k_0 = 0; \quad k_0 \frac{C_2}{C_3} = 0; \quad k_0 \frac{C_2}{C_3} + \frac{4}{3} k_0 = 0;$$
$$C_2 = \infty; \quad C_2 = -1; \quad C_2 = 0; \quad \frac{C_2}{C_3} = -\frac{4}{3};$$
$$\varphi = \pi; \quad 3{,}73; \quad 4{,}49; \quad 5{,}33.$$

Unter Berücksichtigung der erhöhten Steifigkeit des Zugstabes erhält man:

$$\frac{k_0}{C_2} + \frac{k_0}{(C_2)_{\text{hyp}}} = 0; \qquad \frac{C_2}{C_3} + \left(\frac{C_2}{C_3}\right)_{\text{hyp}} = 0;$$
$$\varphi = 3{,}93; \qquad 5{,}61.$$

Sind von einem durch Querkräfte belasteten Feld die Anschlußsteifigkeiten bekannt, so können wiederum die endgültigen Stützmomente aus den Volleinspannmomenten errechnet werden. Mit denselben Bezeichnungen wie in Abb. 4 ergibt sich jetzt für die Verdrehung des Stabendes A:

$$\alpha = \frac{M_A - \overline{M}_A}{k_0} C_2 + \frac{M_B - \overline{M}_B}{k_0} \cdot \frac{C_1}{2} = -\frac{M_A}{k_A}.$$

Wendet man diese Beziehung auch auf das andere Stabende an und setzt $k_A/k_0 = r_A$ sowie $k_B/k_0 = r_B$, so folgt damit

$$M_A (1 + r_A \cdot C_2) + M_B \cdot r_A \cdot C_1/2 = \overline{M}_A \cdot r_A \cdot C_2,$$
$$M_A \cdot r_B \cdot C_1/2 + M_B (1 + r_B \cdot C_2) = \overline{M}_B \cdot r_B \cdot C_2,$$

woraus

$$M_A = \frac{\overline{M}_A (r_A \cdot C_2 + r_A \cdot r_B \cdot C_3) + \overline{M}_B \cdot r_A \cdot C_1/2}{1 + (r_A + r_B) \cdot C_2 + r_A \cdot r_B \cdot C_3}.$$

Die resultierenden Stützmomente erscheinen also wieder in der Form $M_A = \overline{M}_A \cdot m_A + \overline{M}_B \cdot n_A$ und $M_B = \overline{M}_A \cdot n_B + \overline{M}_B \cdot m_B$, doch sind die Koeffizienten m und n hier Funktionen von drei Variabeln: r_A, r_B und φ:

$$m = \frac{r_A \cdot C_2 + r_A \cdot r_B \cdot C_3}{1 + (r_A + r_B) \cdot C_2 + r_A \cdot r_B \cdot C_3}; \quad n = \frac{r_A \cdot C_1/2}{1 + (r_A + r_B) \cdot C_2 + r_A \cdot r_B \cdot C_3}. \tag{10}$$

Für $\varphi = 0$ gehen diese Ausdrücke in die früher angegebenen nach Gl. (5) über, wenn man r_A und r_B durch v_A und v_B ausdrückt.

2. Teil.

Die im ersten Teil abgeleiteten Beziehungen ermöglichen die Ermittlung des Momentenverlaufs — und bei Vorhandensein von Axialkräften auch die der reduzierten Knicklängen —, solange die Knotenpunkte gegen Verdrehen elastisch, gegen Verschieben aber starr festgehalten sind. Ist hingegen auch eine Verschiebung der Stabenden möglich, so müssen die Formeln abermals erweitert werden. Bei dem Einzelstab $\overline{A\,B}$ (Abb. 11) seien die Enden mit den Steifigkeiten k_A und k_B gegen Verdrehen und mit den Steifigkeiten s_A und s_B gegen Verschieben normal zur Stabrichtung des unbelasteten Zustands gehalten; die Verschiebungssteifigkeiten sind dabei als Quotienten aus angreifender Kraft durch erzeugte Verschiebung definiert, haben also die Dimension einer Streckenlast. Die Axialkraft P soll stets in der Verbindungslinie der Stabenden wirken; eine allenfalls durch die Belastungsart bedingte andere Richtung von P ist durch eine Komponente in der Richtung von H zu berücksichtigen. Geometrische und Gleichgewichtsbedingungen ergeben:

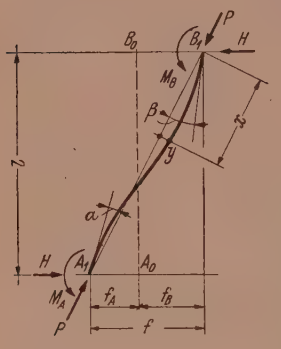

Abb. 11.

$$M_A = k_A (f/l - \alpha); \quad M_B = k_B (f/l - \beta); \quad M_A + M_B + H \cdot l = 0;$$

$$H = s_A \cdot f_A = s_B \cdot f_B = s \cdot f; \quad s = \frac{s_A \cdot s_B}{s_A + s_B},$$

woraus

$$k_A \cdot \alpha + k_B \cdot \beta = f/l\,(k_A + k_B + s\,l^2).$$

Aus der Momentengleichung

$$M_A = P \cdot y + M_A + H \cdot x = -EJ \cdot y''$$

folgt

$$y = A \sin \frac{\varphi x}{l} + B \cos \frac{\varphi x}{l} - \frac{k_A}{P} (f/l - \alpha) - \frac{s f}{P} \cdot x.$$

Die Verdrehungswinkel an den Enden sind

$$\alpha\,(\beta) = \frac{f}{l} \cdot \frac{k_{A(B)} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi} - \frac{s\,l^3}{EJ} \cdot \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)}{1 + k_{A(B)} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi}},$$

damit wird

$$r_A \cdot \frac{3\,r_A \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi} - \frac{s\,l^3}{EJ\,\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)}{1 + 3\,r_A\,\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi}} + r_B \cdot \frac{3\,r_B \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi} - \frac{s\,l^3}{EJ\,\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)}{1 + 3\,r_B\,\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi}} =$$

$$= r_A + r_B + \frac{s\,l^3}{3\,EJ}.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right) = \frac{1 - \varphi\operatorname{ctg}\varphi}{\varphi^2} = \frac{C_2}{3}$$

und

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi} + \frac{2}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)\right] = \frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi} - 1\right) = \frac{C_3}{9},$$

so ergibt sich eine Beziehung zwischen den Verdrehungssteifigkeiten und der Verschiebungssteifigkeit in der Form

$$\frac{s\,l^3}{3\,EJ} + \frac{r_A + r_B + r_A \cdot r_B\,C_4}{1 + (r_A + r_B) \cdot C_2 + r_A \cdot r_B \cdot C_3} = 0, \quad \text{wobei} \quad C_4 = 3\,\frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\varphi/2}. \tag{11}$$

Dieses „Gleichgewicht" der Steifigkeiten ist auch der Ausdruck für die Stabilitätsgrenze; bei bekannten Werten von k_A, k_B, s_A und s_B läßt sich daraus der kritische Wert von φ ermitteln. Anderseits kann die Gl. (11) — so wie früher die Gl. (7) — aber auch zur Berechnung der weitergeleiteten Steifigkeit benützt werden, wenn die Anschlußsteifigkeiten k_B und s_B am anderen Ende gegeben sind; die Verschiebungssteifigkeit im betrachteten Knoten A ist dabei mit $s_A = \infty$ anzunehmen, also $s = s_B$. Die vom Stab „weitergeleitete" Steifigkeit ist dann negativ gleich der für das indifferente Gleichgewicht notwendigen Anschlußsteifigkeit:

$$k'_A = -k_A = \frac{3\,EJ}{l} \cdot \frac{r_B + \frac{s\,l^3}{3\,EJ}\,(1 + r_B \cdot C_2)}{1 + r_B\,C_4 + \frac{s\,l^3}{3\,EJ}\,(C_2 + r_B \cdot C_3)} =$$

$$= \frac{k_B + s\,l^2\,(1 + C_2 \cdot k_B/k_0)}{1 + C_4 \cdot k_B/k_0 + \frac{s\,l^2}{k_0}\,(C_2 + C_3 \cdot k_B/k_0)} \tag{12}$$

mit dem Grenzwert $k_A' = \frac{k_0 + C_2 \cdot k_B}{C_2 + C_3 \cdot k_B/k_0}$ für $s = \infty$. Für $s = 0$ erhält man hingegen

$$k_A' = \frac{k_B}{1 + C_4 \cdot k_B/k_0} \tag{13}$$

mit dem Grenzwert $k_A' = \frac{k_B}{1 + 3\,k_B/k_0}$ für $\varphi = 0$.

Die Anwendung der abgeleiteten Beziehungen soll an dem Beispiel eines „Stockwerksrahmens" gezeigt werden (Abb. 12).

Ist er symmetrisch gebaut und nur durch Horizontalkräfte beansprucht, so verformt er sich so, daß man jede Hälfte für sich betrachten und in der Mitte der Riegel Gelenke annehmen kann. Die Verschiebungssteifigkeit in den Knoten D und E ist aus Symmetriegründen gleich Null. Mit den

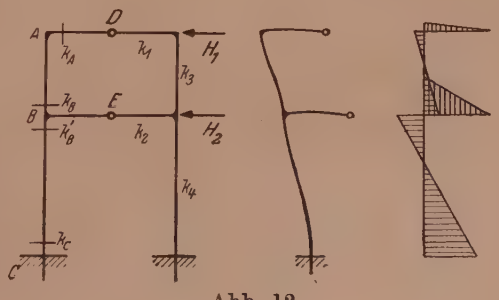

Abb. 12.

Eigensteifigkeiten k_1 bis k_4 ergeben sich die Verdrehungssteifigkeiten in A, B und C nach

$$k_A = k_1; \quad k_B = \frac{k_1}{1 + 3\,k_1/k_3}; \quad k_C = \frac{k_B + k_2}{1 + 3\,(k_B + k_2)/k_4}.$$

Die Momentenverteilung infolge der Horizontalkräfte H_1 und H_2 ergibt sich aus der Betrachtung der Abb. 11, wobei aber — wegen $s = 0$ — die Kraft H nicht stützend, sondern belastend wirkt: $M_A + M_B = H \cdot l$.

Gleichsetzen der Verdrehungswinkel an jedem Stabende liefert die zweite Bestimmungsgleichung für M_A und M_B

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{r_A\,(r_B + 2/3)}{r_B\,(r_A + 2/3)}$$

und damit

$$M_{A(B)} = \frac{H\,l}{2} \cdot \frac{r_{A(B)}\,(r_{B(A)} + 2/3)}{r_A \cdot r_B + 1/3\,(r_A + r_B)}. \tag{14}$$

Nach dem früher Gesagten sind die Anschlußsteifigkeiten für

das Feld $\overline{AB}$: $k_A = k_1; \quad K_B = \frac{k_4}{3} + k_2;$

Feld $\overline{BC}$: $K_B' = \frac{k_1}{1 + 3\,k_1/k_3} + k_2; \quad k_C = \infty$

und damit die Momentenverteilung infolge von $H_{\overline{AB}} = \frac{H_1}{2}$ und $H_{\overline{BC}} = \frac{H_1 + H_2}{2}$ nach Gl. (14) berechenbar.

Die Ermittlung der reduzierten Knicklängen führt bei einfachen Belastungsannahmen wieder auf bekannte Werte. Beim einseitig eingespannten Stab (Abb. 13) ergibt eine Druckkraft, die zur ursprünglichen Stabachse parallel bleibt, eine Querkomponente, die einer negativen Schubsteifigkeit entspricht:

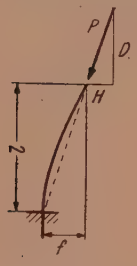

Abb. 13.

Abb. 14.

$$s = -\frac{H}{f} = -\frac{P}{l} = -\frac{\varphi^2\,EJ}{l^3}.$$

Damit folgt aus Gl. (12) mit $k_A = \infty$, $k_B = 0$:

$$-\frac{\varphi^2\,EJ}{l^3} = -\frac{3\,EJ}{l^3} \cdot \frac{1}{C_2}; \quad C_2 = \frac{3}{\varphi^2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad s_k = 2\,l.$$

Können sich die Stabenden parallel zueinander frei verschieben (Abb. 14), so ist $k_A = k_B = \infty$ und

$$-\frac{\varphi^2\,EJ}{l^3} = -\frac{3\,EJ}{l^3} \cdot \frac{C_4}{C_3}; \quad \frac{C_3}{C_4} = \frac{3}{\varphi^2}; \quad \varphi = \pi; \quad s_k = l.$$

Wird bei dem Stockwerksrahmen nach Abb. 12 nach den reduzierten Knicklängen gefragt, die zu einer gegebenen Verteilung der Axialkräfte gehören, so ist bei symmetrischer Konstruktion und Belastung der Rahmen wieder in der Mitte zerschnitten zu denken. Es seien φ' und φ'' die zu suchenden Knickwinkel in den Feldern $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Als Bezugspunkt für das Nullwerden der Gesamtsteifigkeit werde der Knoten B herausgegriffen. Von oben und unten beginnend, sind die Steifigkeiten bei antimetrischer Verformung nach Abb. 12, die die größeren Knicklängen ergibt:

$$k_A = k_1; \quad k_B = \frac{k_1}{1 + C_4' \cdot k_1/k_3}; \quad k_C = \infty; \quad k_B' = k_4 \cdot \frac{C_2''}{C_3''}.$$

Da das Verhältnis — oder eine sonstige Beziehung — zwischen φ' und φ'' aus der Belastungsannahme bekannt ist, sind die Koeffizienten C_4', C_2'' und C_3'' durch jenen Wert von φ' bestimmt, mit dem die Gleichung $k_B + k_B' + k_2 = 0$ erfüllt wird.

Sind Konstruktion und Belastung nicht beide gleichzeitig symmetrisch, so liegen die Wendepunkte nicht mehr genau in der Mitte der Riegel und es kann deren Steifigkeit nicht als von vornherein bekannt angenommen werden. Man kommt dann auf ähnliche Probleme wie bei dem ringförmig geschlossenen Rahmen nach Abb. 3; nimmt

man die Wendepunkte trotzdem in der Mitte an, so weicht das Rechnungsergebnis meist nur sehr wenig von dem der genauen Rechnung ab.

Ein anderes Problem ist die unsymmetrische Biegungsbelastung, wie sie in Abb. 15 an einem einfachen Beispiel gezeigt wird. In solchen Fällen läßt sich stets die „Über-

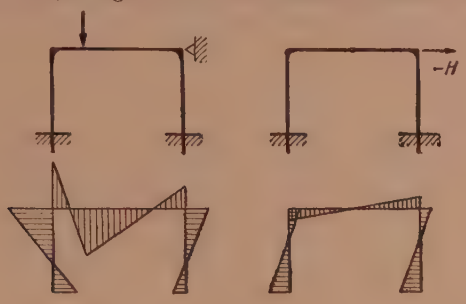

Abb. 15.

lagerungsmethode" anwenden: Man ermittelt zuerst die Momentenverteilung infolge der gegebenen Belastung unter der Annahme unverschieblicher Knoten und führt dann den zugehörigen Auflagerdruck H als zweite Belastung negativ ein. Algebraische Summierung der Momente infolge der beiden Belastungen gibt den resultierenden Momentenverlauf.

Bei verwickelteren Systemen, wie etwa bei dem gekröpften Durchlaufträger nach Abb. 16, ist es oft vorteilhaft, ganze Rahmen durch einfache Stäbe mit gleicher Steifig-

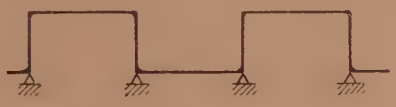

Abb. 16.

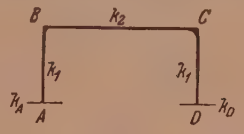

Abb. 17.

keit zu ersetzen. Für einen symmetrischen Rahmen nach Abb. 17 ist die Verdrehungssteifigkeit in A, wenn k_1 und k_2 die Eigensteifigkeiten der Stäbe und k_D die Anschlußsteifigkeit in D bezeichnen, $k_A = n \cdot k_1$, wobei n aus der Tab. 4 entnommen werden kann, die für den Fall gilt, daß die Knoten A und D gegen Verschieben festgehalten sind.

Tabelle 4. Werte von n.

$k_2/k_1 =$	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	5,0	∞
$3k_D/k_1 = 0$	0,157	0,221	0,310	0,405	0,455	0,476	0,488	0,513	0,533
1	295	350	415	490	534	553	565	591	619
2	366	411	465	533	574	594	606	635	667
3	403	443	495	558	598	619	632	663	697
5	446	484	526	586	627	648	660	695	733
10	485	518	562	617	657	679	693	730	773
∞	543	570	606	658	698	722	737	782	833

Zusammenfassung.

Die Steifigkeitsmethode ermöglicht die direkte rechnerische Ermittlung des Momentenverlaufs und der reduzierten Knicklängen in Stabsystemen, unbeeinflußt von der Anzahl überzähliger Stäbe oder Einspannungen und ohne Auflösung von Gleichungssystemen. Bei Tragwerken mit mehreren Verschiebungsmöglichkeiten läßt sich durch Ersatz von Teilrahmen durch Stäbe von der gleichen Steifigkeit die Ermittlung der „weitergeleiteten Steifigkeiten" einfacher gestalten.

(Eingegangen am 27. Mai 1946.)

Berichte.

Das Turbulenzproblem.

Von F. Kraemar, Wien.

(Zusammenfassender Bericht über Arbeiten aus den Jahren 1933 bis 1938.)

Das Turbulenzproblem, d. h. die Frage, warum die laminare Schichtenströmung nur in einem gewissen Geschwindigkeitsbereich auftritt, um dann der ungeordneten turbulenten Strömung zu weichen, nimmt in der Hydrodynamik noch immer einen weiten Raum ein. Da der letzte zusammenfassende Bericht von F. Magyar und dem Verfasser[1] über zehn Jahre zurückliegt und in der Zwischenzeit gerade durch die Einführung der Statistik ein bemerkenswerter Fortschritt zur Lösung des Problems erzielt wurde, scheint es gerechtfertigt, in einer Übersicht die seit diesem Zeitpunkt erschienenen hauptsächlichsten Arbeiten zu betrachten.

Der Bericht soll sich in zwei Teile gliedern, von denen der erste die Arbeiten der Jahre 1933 bis 1938, der zweite die von 1939 bis 1945 umfaßt.

Die Arbeiten lassen sich dabei in folgende Gruppen gliedern:

1. Untersuchungen über die Entstehung der Turbulenz,
2. Betrachtungen über die ausgebildete Turbulenz.

Bei letzteren lassen sich wieder zwei hauptsächliche Gruppen unterscheiden. Einerseits Arbeiten, welche die Lösung des Problems mit Hilfe der Stokes-Navierschen Gleichungen unter Einführung plausibler Annahmen über den Mechanismus der Strömung anstreben und andererseits solche, welche mit Hilfe der Statistik eine Klärung der Verhältnisse erzielen wollen.

Außerhalb der Betrachtung sollen jene Arbeiten bleiben, welche sich nur mit der Widerstandsfrage beschäftigen.

Entstehung der Turbulenz.

Mit der fast schon klassischen Annahme, die turbulente Strömung als eine Instabilität der Laminarströmung zu betrachten, befassen sich eine Reihe von Arbeiten. So untersucht W. Tollmien[2] mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen die Stabilität von symmetrischen Kanalprofilen und Grenzschichtprofilen. In Erweiterung eines früher von Lord Rayleigh gefundenen Satzes beweist er, daß bei Vernachlässigung der Reibung Profile mit Wendepunkt instabil sind. Er findet dabei, daß für die reibungslose Störungsdifferentialgleichung

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = 0,$$

wobei $U(y)$ die Geschwindigkeitsverteilung der Grundströmung, $\psi(x, y, t) = \varphi(y)\, e^{i\alpha(x-ct)}$ die Partialschwingung der Störungsbewegung, $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Wellenlänge der Störung

$$c = c_r + i c_i,$$

c_r die Phasengeschwindigkeit der Störung und c_i die Anfachungsgröße ist, zu den neutralen Eigenlösungen benachbarte angefachte Eigenschwingungen existieren. Für symmetrische Kanalprofile kann die Phasengeschwindigkeit und die Anfachungsgröße explizit berechnet werden.

H. Schlichting[3] untersucht die Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Er untersucht die Stabilität der Laminarströmung gegenüber kleinen Störungen und geht dabei von der vollständigen „Turbulenzgleichung“

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) = U'' \varphi = -\frac{i}{\alpha R}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi)$$

mit den Randbedingungen $\varphi = \varphi' = 0$ an den begrenzenden Wänden aus. Für ein vorgegebenes Wertepaar R, α hat diese Gleichung eine Lösung nur für einen bestimmten Wert von c. Während bei allen früheren Stabilitätsuntersuchungen c rein reell angenommen wurde, und lediglich nach derjenigen Kurve im R, α-Diagramm gesucht wurde, welche die Durchgangspunkte von negativem c_i zu positivem c_i enthält, wird in dieser Arbeit $c_i \neq 0$ angenommen. Das Resultat folgt in Form eines Diagramms der Werte c_i als Funktion von R und α. Die theoretische Stabilitätsgrenze ergibt sich bei $U_m\, x/\nu = 1{,}1 \cdot 10^5$, wobei U_m die Maximalgeschwindigkeit der Laminarströmung ist. Nach den experimentell von v. d. Hegge Zynen gefundenen Stabilitätsgrenzen $U_m\, x/\nu = 3{,}5$ bis $5 \cdot 10^5$ scheint es plausibel, daß die Turbulenz aus den hier betrachteten, relativ langwelligen Störungen $\lambda \doteq 30\, \delta^*$ (δ^* Verdrängungsdicke) entsteht.

In einer späteren Arbeit wird von H. Schlichting[4] für zwei spezielle indifferente Schwingungen der Strömungsverlauf bei der Plattenströmung berechnet. Die mittleren Schwankungsgeschwindigkeiten $\sqrt{\overline{u'^2}}$ und $\sqrt{\overline{v'^2}}$ sowie der in der statistischen Behandlung der Turbulenz bedeutsame Korrelationskoeffizient $\overline{u'\,v'}/\sqrt{\overline{u'^2}\,\overline{v'^2}}$ werden als Funktion des Wandabstandes y berechnet. Aus der Betrachtung der von der Haupt- auf die Nebenbewegung übertragenen Energie ergibt sich, daß für eine der untersuchten Störungen die Energieumsetzung in der Schwingungszeit die Hälfte der anwesenden kinetischen Energie beträgt.

Die Stabilität einer laminaren Strömung zwischen parallelen Wänden gegenüber dreidimensionalen kleinen Störungen untersucht H. B. Squire.[5] Er findet eine Störungsdifferentialgleichung vierter Ordnung, die sich von der oben angegebenen „Turbulenzgleichung" nur dadurch unterscheidet, daß an Stelle α^2 der Ausdruck $\alpha^2 + \beta^2$ gesetzt werden muß und die Reynoldsche Zahl R durch $\frac{R\,\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ zu ersetzen ist, wobei die Störung in der Strömungsrichtung in der Form $u\,(y)\, e^{i(\alpha x + \beta z - \sigma t)}$ angesetzt wird. Daraus folgert der Verfasser, daß es für das Studium der Labilität einer Laminarströmung zwischen parallelen Wänden genügt, sich auf zweidimensionale Störungen zu beschränken. Irgendeine Instabilität gegenüber dreidimensionalen Störungen muß sich bereits bei einer kleineren Reynoldsschen Zahl für zweidimensionale Störungen ergeben.

In einer Reihe von Arbeiten behandelt J. L. Synge[6,7,8] die Stabilität von bestimmten reibungslosen Strömungen. So untersucht er die Stabilität einer zwischen zwei konzentrischen Zylindern rotierenden, heterogenen, inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit.[6] Er benutzt dabei die Methode der kleinen Schwingungen, die er dreidimensional und achsensymmetrisch annimmt. Auf die Stabilität oder Instabilität kann aus dem Vorzeichen der Größe $\frac{d}{dr}\,(\varrho\, r^2\, v^2)$ geschlossen werden. In diesem Ausdruck ist r der Abstand von der Achse, v die Rotationsgeschwindigkeit und ϱ die Dichte der ungestörten Flüssigkeit. Die Strömung ist stabil, wenn der Ausdruck im ganzen Bereich positiv ist, hingegen instabil bei negativen Vorzeichen. In der gleichen Arbeit gibt er für eine Parallelströmung unter dem Einfluß der Schwere die Bedingungen für die Instabilität an. Er weist dabei nach, daß bei bestimmten Umständen keine reellen Eigenwerte auftreten können, woraus er schließt, daß komplexe Eigenwerte existieren, was Instabilität bedeuten würde. Für die Strömung zwischen zwei parallelen Wänden mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung weist J. L. Synge[7] die Stabilität nach. In ([8]) gibt er einen neuen Beweis für die schon von Lord Rayleigh nachgewiesene Tatsache, daß die Poisseuille-Strömung in einem Kanal stabil ist, wenn man den Reibungseinfluß auf die Störungen vernachlässigt. Für diesen Beweis benutzt er aber nicht wie Lord Rayleigh die Methode der kleinen Schwingungen, sondern

berechnet den quadratischen Mittelwert der Wirbelstärke der Störungen. Durch den Nachweis, daß dieser Mittelwert konstant bleibt, wird die Stabilität der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung bewiesen.

S. Goldstein[9] untersucht nach der Methode der kleinen Schwingungen die Stabilität einer Strömung zwischen parallelen Wänden mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung unter Berücksichtigung der Reibung. Er macht für die Stromfunktion der Störungsbewegung den schon früher angegebenen Ansatz

$$\psi(x, y, t) = f(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)}.$$

Zur Berechnung des Eigenwertes β in Abhängigkeit von α wird für kleine αR eine Entwicklung nach steigenden Potenzen vorgeschlagen, für größere αR die Ermittlung der Nullstellen einer unendlichen Determinante.

Im Anschluß an die Arbeit von S. Goldstein[9] untersucht Chaim L. Pekeris[10] die Stabilität der Couette-Strömung und der Kanalströmung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung. Er setzt die Stromfunktion in der Form

$$\psi = f(y) \cdot e^{i\alpha\left(C U_m \frac{t}{h} - \frac{x}{h}\right)}$$

an, wobei $2h$ die Kanalbreite, U_m die Maximalgeschwindigkeit, x die Hauptströmungsrichtung bedeuten. Der Eigenwert C wird in die Potenzreihe

$$C = \frac{C_{-1}}{i \alpha R} + C_0 + C_1 (i \alpha R) + C_2 (i \alpha R)^2 + \ldots$$

entwickelt. Die numerische Ermittlung von C_{-1} und C_1 ergibt für die Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung Stabilität für $\alpha R < 140$.

Eine Untersuchung der Stabilität einer Strömung in einem divergenten Kanal, die von den üblichen Methoden wesentlich abweicht, macht W. R. Dean.[11] Die als Grundströmung angenommene rein radiale laminare Strömung im divergenten Kanal ist schon früher von Hamel[12] behandelt worden. Es wird dabei der Untersuchung das spezielle Geschwindigkeitsprofil zugrunde gelegt, bei dem gerade noch keine Rückströmung eintritt, $u'(\vartheta) = 0$ an den Wänden $\vartheta = \pm \alpha$ (α = halber Öffnungswinkel). Der Grundströmung

$$u = \frac{U(\vartheta)}{r}; \quad v = 0,$$

wobei u die Radial- und v die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit ist, wird die Störungsbewegung

$$u' = u_1(\vartheta)\, r^n; \quad v' = v_1(\vartheta)\, r^n; \quad p' = p_1(\vartheta)\, r^{n-1},$$

in welcher p den Druck bedeutet, überlagert. Durch Elimination des Druckes aus der Bewegungsgleichung folgen für u_1, v_1 zwei Differentialgleichungen mit den Randbedingungen $u_1 = v_1 = 0$ an den Wänden $\vartheta = \pm \alpha$. Die Lösungen u_1, v_1 werden ebenso wie die Grundströmung in Fourier-Reihen nach ϑ entwickelt. Die Forderung nach von Null verschiedener Lösungen für u_1, v_1 führt zu einer Bedingungsgleichung für n. Positive n-Werte bedeuten Anwachsen der Störungen stromabwärts, also instabile Störungen, und negative n-Werte Abklingen, also stabile Störungen. Bei der Untersuchung symmetrischer und asymmetrischer Verteilungen von $u_1(\vartheta)$ in bezug auf die Kanalachse ergab sich, daß in beiden Fällen instabile Störungen möglich sind. Die Störung des Druckes bei instabilen Störungen wächst dabei stromabwärts schwächer an als die Störung der Geschwindigkeit.

Mit der Stabilitätsuntersuchung der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern beschäftigen sich die Arbeiten von Alfred Rosenblatt[13] und S. Goldstein.[14] In der Arbeit von Rosenblatt werden dreidimensionale Störungsbewegungen betrachtet, die vom Meridianwinkel unabhängig sind und mit der Zeit abklingen. Die Zylinder sind dabei unendlich lang angenommen. Goldstein untersucht nach der Methode

der kleinen Schwingungen die Stabilität einer zähen inkompressiblen Strömung zwischen zwei unendlich langen rotierenden Zylindern beim Auftreten eines axialen Druckgefälles. Der gleiche Fall, jedoch ohne axiale Geschwindigkeitskomponente, ist früher von G. I. Taylor behandelt worden. Die Spaltbreite d wird als klein gegenüber dem Radius a des inneren Zylinders angenommen. Die Störungen werden als rotationssymmetrische, in axialer Richtung z fortschreitende Wellen proportional $e^{i(\sigma t + \lambda z)}$ angenommen. Dabei ist t die Zeit, λ die Wellenlänge, $\Re(\sigma)$ die Kreisfrequenz, $\Im(\sigma)$ das Dekrement. Das Problem führt auf drei simultane Differentialgleichungen mit sechs Randbedingungen, von denen je eine von dritter, zweiter und erster Ordnung ist. Die charakteristische Gleichung liefert eine Beziehung zwischen der Reynoldsschen Zahl R, der Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders ω_i, dem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit des äußeren und inneren Zylinders $\alpha = \frac{\omega_a}{\omega_i}$, λ und σ. $\left(R = \frac{\bar{U} d}{\nu}, \bar{U}\right.$ mittlere Geschwindigkeit in axialer Richtung$\left.\right)$. Unter Beschränkung auf die neutralen Störungen $[\Im(\sigma) = 0]$ ergibt sich zu jedem Wertetripel R, α, λ ein Wert von ω_i, der für die gegebene Störung R, α, λ als kritischer Wert der Umdrehungsgeschwindigkeit anzusehen ist. Schließlich wird hieraus bei festgehaltenem R und α noch diejenige Störungswellenlänge λ ermittelt, welche die niedrigste kritische Umdrehungsgeschwindigkeit ω_i hat. Auf diese Weise wird zu jeder Reynoldsschen Zahl R und zu jedem Drehzahlverhältnis α eine kritische Drehzahl des inneren Zylinders erhalten, bei deren Überschreitung Instabilität eintritt. Die Lösung des Eigenwertproblems führt auf eine unendliche Determinante, deren numerische Auswertung für stillstehenden äußeren Zylinder ($\alpha = 0$) nur bis $R = 25$ gelingt. Für $R = 0$ ergibt sich mit guter Näherung das Taylorsche Ergebnis für die kritische Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders $K = \frac{\omega_c^2 d^3 a}{\pi^4 \nu^2} = 17{,}34$. Mit wachsendem R nimmt K zunächst schwach zu und dann wieder ab. Der Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit Versuchen von R. J. Cornish, bei denen für $R = 10$ bis 200 die kritische Drehzahl aus Druckabfallmessungen bestimmt wurde, zeigt keine Übereinstimmung. Die berechneten Werte sind wesentlich kleiner als die beobachteten.

Die Stabilität eines unendlich langen Flüssigkeitszylinders mit dem Radius a und der Zähigkeit μ', der sich in einer anderen Flüssigkeit mit der Zähigkeit μ befindet, behandelt S. Tomotika.[15] Er wendet ebenfalls die Methode der kleinen Schwingungen an und betrachtet rotationssymmetrische Störungsbewegungen. Wird die Störung proportional $e^{i(nt + kz)}$ angenommen, wobei $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, die Wellenlänge der Störung in Richtung der Zylinderachse ist, so ergibt die Stabilitätsrechnung n in Abhängigkeit von μ'/μ. Bei der Rechnung werden die Zähigkeits- und Kapillarkräfte berücksichtigt, die Trägheitskräfte aber vernachlässigt. Sowohl für den Fall $\mu'/\mu = \infty$, der schon früher von Lord Rayleigh behandelt wurde, als auch für $\mu'/\mu = 0$ folgt, daß die größte Instabilität bei $\lambda = \infty$ vorhanden ist. Ansonsten ergibt sich zu jedem Wert μ'/μ eine bestimmte endliche Wellenlänge, bei der Instabilität auftritt. Die Instabilität eines langen geraden Flüssigkeitsfadens, wie er in dieser Arbeit betrachtet wird, zeigt sich im Experiment durch den Zerfall in Tröpfchen mit regelmäßigem Abstand. Versuche von G. I. Taylor zeigen für den Fall $\frac{\mu'}{\mu} = 0{,}91$ gute Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen.

Eine andere Betrachtung der Entstehung der Turbulenz wird in den Arbeiten[15,16,17,18] gemacht. Der Eintritt der Turbulenz ist dabei wesentlich durch die Größe der beim Einlauf auftretenden Störungen bestimmt. So untersucht Herrmann Kurzweg[15] experimentell die Labilität der laminaren Strömung durch ein Kreisrohr gegenüber endlichen Störungen. Die sich beim Einlauf ablösende Diskontinuitäts-

fläche löst sich bei genügend hohen Reynoldsschen Zahlen in einzelne Wirbel auf, die im laminaren Strömungsbereich stromabwärts verschwinden, während sie im turbulenten Gebiet in eine unregelmäßige Wirbelung übergehen. Die erwähnten Wirbel werden im Einlauf und auch weiter hinten im Rohr nach ihrem gegenseitigen Abstand, ihrer Zirkulation und ihrer Eigengeschwindigkeit charakterisiert. Zur quantitativen Definition dieser Anfangsstörungen werden ihre Frequenz, ihre Geschwindigkeit und ihre Zirkulation von L. Schiller[16] bestimmt. Auf experimentellem Wege wird das Kriterium gefunden, daß die Turbulenz dann eintritt, wenn die Störungszirkulation gleich der Profilzirkulation der laminaren Rohreinlaufströmung ist. Dieses Kriterium zeigt sich gültig bei verschiedenen Einlaufformen und sehr verschiedenen Reynoldsschen Zahlen. Für die mit der kinematischen Zähigkeit ν dimensionslos gemachte, auf den Radius r bezogene Zirkulation Γ ergibt sich bei allen Einlaufformen der Wert $\frac{\Gamma}{\nu} = 1170$. Aus der Untersuchung der tangentiell angeströmten Platte erhält Schiller kritische Störungswellenlängen, die mit den Tollmienschen theoretischen Ergebnissen übereinstimmen. Für die Kanalströmung bestätigt A. Naumann[17] das gefundene Kriterium und findet eine kritische Reynoldssche Zahl $R = \frac{u\,b}{\nu} = 5000$. H. Hahnemann[18] untersucht die Abhängigkeit der kritischen Reynoldsschen Zahl der Rohrströmung von der Größe der Einlaufstörung. Er untersucht große Anfangsstörungen, große Anlauflängen und rauhe Rohre. Die Größe der Störung wird dabei gemessen durch die auf eine Rohrlänge vom Radius r bezogene Zirkulation Γ an der Stelle, wo der Umschlag der laminaren in die turbulente Strömung erfolgt. Es ergibt sich eine Kurve, welche die kritischen dimensionslosen Störungsbeträge $\frac{\Gamma}{\nu}$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl zeigt. Bei sehr großer Störung $\left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)_{krit} \doteq 10^5$ ergibt sich als kleinste kritische Reynoldssche Zahl $R = \left(\frac{\bar{u}\,r}{\nu}\right) = 1160$. Für kritische Reynoldssche Zahlen zwischen 2 bis $3 \cdot 10^3$ ergibt sich als Größe der Störung $\left(\frac{\Gamma}{\nu}\right)_{krit} = 1170$.

Eine experimentelle Untersuchung zur Prüfung der von W. Tollmien betrachteten periodischen Störungen führt I. Nikuradse[19] durch. Die Reynoldssche Zahl der Grundströmung betrug dabei ungefähr 1000. Der Vergleich mit den Tollmienschen theoretischen Resultaten[2] ergab einige Abweichungen.

Literatur:

[1] F. Magyar u. F. Kracmar: Das Turbulenzproblem. Wasserwirtsch. **1934**, H. 2—3. — [2] W. Tollmien: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. **1**, 79—114 (1935). — [3] H. Schlichting: Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen II, Nr. **38**, 181—208 (1933). — [4] H. Schlichting: Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. **1**, 47—78 (1935). — [5] H. B. Squire: On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. Proc. Roy. Soc., Lond. A **142**, 621—628 (1933). — [6] J. L. Synge: The stability of heterogeneous liquids. Trans. Roy. Soc. Canada III, s. 27, 1—18 (1933). — [7] J. L. Synge: On the disturbance of the steady flow of an inviscid liquid between parallel planes. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. A **234**, 43—78 (1934). — [8] J. L. Synge: The stability of quadratic velocity-distributions for an inviscid liquid flowing between parallel planes. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **15**, 205—210 (1936). — [9] S. Goldstein: The stability of viscous fluid flow under pressure between parallel planes. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 40—54 (1936). — [10] Chaim L. Pekeris: On the stability problem in hydrodynamics. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 55—66 (1936). — [11] W. E. Dean: Note on the divergent flow of fluid. Philos. Mag. VII, s. 18, 759—777 (1934). — [12] G. Hamel: Jb. Deutsch. Math.-Vereinig. 1917. — [13] Alfred Rosenblatt: Sur la

stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux entre deux cylindres coaxiaux. Mathematica, Cluj **9**, 249—283 (1935). — [14] S. Goldstein: The stability of viscous fluid between rotating cylinders. Proc. Cambridge Philos. Soc. **33**, 41—61 (1937). — [15] Herrmann Kurzweg: Neue Untersuchungen über die Entstehung der Turbulenz. Ann. Physik V. F. **18**, 193—216 (1933). — [16] L. Schiller: Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung. Z. angew. Math. Mech. **14**, 36—42 (1934). — [17] A. Naumann: Versuche zur Entstehung der turbulenten Kanalströmung. Forschg. Ing.-Wes. **6**, 139—145 (1935). — [18] H. Hahnemann: Neue experimentelle Untersuchungen über die Entstehung der turbulenten Rohrströmung. Forschg. Ing.-Wes. **8**, 226—237 (1937). — [19] J. Nikuradse: Experimentelle Untersuchungen zur Turbulenzentstehung. Z. angew. Math. Mech. **13**, 174—176 (1933).

(Eingegangen am 14. Jänner 1946.)

Notizen.

Über die Scheiteltangenten von Eilinien.

Von **R. Inzinger**, Wien.

Es wird gezeigt, daß die Scheiteltangenten einer Eilinie nicht zugleich einen Kreis berühren. Diese Tatsache stellt das Gegenstück zu einem Satz des Herrn Ganapati* dar, der besagt, daß die Scheitel einer Eilinie nicht sämtliche einem Kreis angehören.

Es sei k ein beliebiger orientierter Kreis mit der Mitte O und dem Radius ϱ. Die als Hüllkurve ihrer orientierten Stützgeraden aufzufassende Eilinie e sei durch ihre auf den Punkt O als Ursprung bezogene Stützgeradenfunktion $h(\varphi)$ gegeben. Es gilt dann für den Krümmungsradius r von e

$$r = h + h'' \tag{1}$$

und für den Abstand p paralleler Stützgeraden von e und k

$$p = h - \varrho. \tag{2}$$

Zum Beweise unserer Behauptung verwenden wir im folgenden die Tatsache, daß das rings um die Eilinie e erstreckte Integral

$$\oint r' \cdot p \cdot d\varphi = 0 \tag{3}$$

ist. Die Richtigkeit dieser Beziehung bestätigt man leicht durch partielle Integration unter Beachtung von (1) und (2).

Ist e eine von einem Kreis verschiedene Eilinie mit $2 \cdot n$ Scheiteln S_i, dann besitzt e höchstens die zyklische Ordnung $2 \cdot n$ und daher mit einem beliebig gewählten Kreis k höchstens ebenso viele gemeinsame Tangenten t_i.

Die Funktion $r'(\varphi)$ kann ihr Zeichen nur für die Scheitel S_i von e wechseln, während die Funktion $p(\varphi)$ nur für die gemeinsamen Tangenten t_i ihr Zeichen ändert. Wird daher angenommen, daß die gemeinsamen Tangenten t_i von e und k die Tangenten in den Scheiteln S_i von e sind, dann fallen die Zeichenwechsel der Funktionen $r'(\varphi)$ und $p(\varphi)$ zusammen. Das hat zur Folge, daß das Produkt $r'(\varphi) \cdot p(\varphi)$ beim Durchlaufen der Eilinie niemals sein Zeichen wechselt, was einen Widerspruch zu (3) darstellt. Die Scheiteltangenten der Eilinie e können demnach nicht gleichzeitig einem Kreis umschrieben sein.

(Eingegangen am 21. Jänner 1946.)

---

* P. Ganapati, Theorems on Ovals, Annamalai Univ. J. 1, 67—71 (1932), zitiert nach T. Bonnesen u. W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, S. 145. Berlin. 1934.

Buchbesprechungen.

Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Von Dr. techn. Dipl.-Ing. *K. Girkmann*, ord. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 270 Textabb. XVI, 484 S. Wien: Springer-Verlag. 1946. S 54.—, geb. S 57.—.

Das vorliegende Buch ist in fünf Abschnitte gegliedert. Nach einer Einführung in die theoretischen Grundlagen folgt ein Abschnitt über Scheiben. Im dritten Abschnitt werden dünne Platten kleiner Durchbiegungen sowie die Stabilität der Platten behandelt. Ein weiterer Abschnitt befaßt sich mit der Biegetheorie und Stabilität der Schalen. Den Abschluß des Buches bildet ein kurzer Abschnitt, in welchem die Theorie der Faltwerke dargelegt wird.

Dem Verfasser ist eine einfache, klare Darstellung gelungen, die den Leser mit Leichtigkeit durch ein interessantes und wichtiges, aber auch schwieriges Fachgebiet führt, ohne dabei an Exaktheit zu verlieren. Die Theorie wird gerade so weit ausgebaut, als dies zur Durchrechnung charakteristischer praktischer Aufgaben erforderlich ist. Mathematische Hilfsmittel, die über den Rahmen des Lehrstoffes der Technischen Hochschulen hinausgehen, werden dem Leser besonders vorgeführt. Somit ist das vorliegende Werk nicht nur ein Lehrbuch für Studierende, sondern auch ein wertvoller Ratgeber für Ingenieure der Praxis, denen es wärmstens empfohlen werden kann.

Die Ausstattung des Buches ist die bekannte ausgezeichnete Friedensqualität des Springer-Verlages. *F. Magyar*, Wien.

Einführung in die Statik. Von Dr. phil. Dr. techn. *F. Chmelka* und Professor Dipl.-Ing. Dr. techn. *E. Melan*. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 119 Textabb. VII, 132 S. Wien: Springer-Verlag. 1946. S 12.—.

Das verhältnismäßig kurze Buch führt den Leser in einfacher, leicht faßlicher, dabei aber durchaus exakter Weise in die wichtigsten Gebiete der Statik ein. Nach einer eingehenden Behandlung ebener und räumlicher Kraftsysteme folgen Abschnitte über Schwerpunkte ebener Flächen, statisch bestimmte Träger und ebene Fachwerke. Sehr zu begrüßen sind die Abschnitte über Gerberträger und Dreigelenkbogen.

Das Buch ist als Einführung in die Statik für Studierende gedacht, kann aber auch praktisch tätigen Ingenieuren Interessantes bieten. Den Vortragenden an höheren technischen Lehranstalten, die den Mangel an einfachen, wissenschaftlich einwandfreien Darstellungen ganz besonders empfinden, ist das Buch sehr zu empfehlen. *F. Magyar*, Wien.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar und Prof. Dr. Karl Wolf, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

Vor kurzem erschien:

Flächentragwerke

Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke

Von

Dr. techn. Dipl.-Ing. **Karl Girkmann**
ord. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Mit 270 Textabbildungen. XVI, 484 Seiten. 8°. Preis S 54.—

Um den künftigen Ingenieuren des Stahl- und Stahlbetonbaues die notwendige theoretische Vorbildung zu geben, wurde an den technischen Hochschulen u. a. die Pflichtvorlesung über Platten- und Schalentragwerke eingeführt, in der den Studierenden der Bauingenieur-Wissenschaften konstruktiver Fachrichtung die grundlegenden Kenntnisse über die Theorie der Flächentragwerke — das sind dünnwandige, nach ebenen oder gekrümmten Flächen geformte Traggebilde — vermittelt werden.

Das Buch behandelt den Lehrstoff dieser Vorlesungen des Verfassers. Für die Herausgabe in Buchform sind die Vorlesungen im Hinblick auf den erweiterten Leserkreis sowie zur Erreichung der notwendigen Geschlossenheit entsprechend ergänzt worden. Das Buch ist als Lehrbuch gedacht, in dem die Studierenden die jeweils vorgetragenen Kapitel nachlesen können; es soll aber auch jene Ingenieure der Praxis, die zur Vertiefung ihrer theoretischen Kenntnisse die ihnen noch nicht bekannte Theorie der Flächentragwerke kennenlernen wollen, in dieses nicht einfache Wissensgebiet unter möglichster Ausschaltung der Anfangsschwierigkeiten einführen und sie nicht nur mit den wichtigeren Lösungsergebnissen, sondern auch mit den Lösungsverfahren, soweit sie für den Techniker in Betracht kommen, vertraut machen. Deshalb ist das Buch möglichst leicht verständlich und in der Sprache des Ingenieurs geschrieben, sowie mit einer reichlichen Anzahl von erläuternden Textabbildungen ausgestattet worden. Die Theorie wird jeweils nur soweit entwickelt, als dies zur Lösung der gegenständlichen Aufgaben erforderlich ist. Es gelangen vorwiegend einfachere Probleme zur Behandlung, die den Bedürfnissen des Stahl- und des Stahlbetonbaues entsprechend ausgewählt sind. Innerhalb jener Teilgebiete, die für die technische Praxis von besonderer Bedeutung sind, ist der Aufgabenkreis auch weiter erstreckt worden.

Soeben erschien:

Einführung in die Festigkeitslehre

für Studierende des Bauwesens

Von

Dr. phil. Dr. techn. **Fritz Chmelka** und Dipl.-Ing. Dr. techn. **Ernst Melan**
Wissenschaftlicher Assistent an der Technischen Hochschule in Wien — o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Mit 216 Textabbildungen. VIII, 304 Seiten. Preis S 28.—

Von den gleichen Verfassern erschien früher „Einführung in die Statik". Vierte, verbesserte Auflage. Mit 119 Textabbildungen. VII, 132 Seiten. 1946. Preis S 12.—. Vergriffen. Unveränderter Neudruck unter der Presse.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Printed in Austria.